UNIVERSITE DU QUEBEC A MONTREAL

APPRENTISSAGE DES LIMITES A L'INFINI DE FONCTIONS POLYNOMIALES RATIONNELLES AVEC AIDE DU LOGICIEL GEOGEBRA EN CALCUL DIFFERENTIEL

RAPPORT DE RECHERCHE

PRESENTE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN MATHEMATIQUES

PAR

CHARLES LAPORTE

DECEMBRE 2017

REMERCIEMENTS

De nombreuses années ont passé depuis mon entrée à la maîtrise en mathématiques, profil didactique. Je croyais être au bon endroit, au bon moment. De nombreuses embûches de toutes sortes furent parsemées sur ma route. Par contre, j'ai toujours crû arriver à bon port un jour.

Un merci particulier aux membres et collègues de la maîtrise qui m'ont tellement donné de courage et de commentaires judicieux durant les quelques cours que j'ai eus à leurs côtés. Les repas et les discussions avec eux m'ont permis de souffler par moment, d'évacuer le stress du quotidien.

Un grand remerciement va directement à mes étudiants de l'automne 2017 qui m'ont aidé grandement en acceptant de participer à ma recherche et à mon expérimentation lors de cette session où j'ai terminé mon mémoire portant sur le cours de Calcul 1.

Je tiens à remercier les collègues de travail du Collège LaSalle avec qui je travaille depuis l'automne 2011. Avec eux, j'ai pu développer ma fibre enseignante, mes qualités comme pédagogue et didacticien des mathématiques ainsi qu'un questionnement en continu comme professionnel en éducation pour ne pas cesser d'innover. Grâce à cette équipe, j'ai pu enseigner les mathématiques aux programmes de sciences humaines (calcul différentiel, calcul intégral, algèbre linéaire et géométrie vectorielle, méthodologie quantitative et méthodes quantitatives appliquées), d'informatique (mathématiques et statistiques) et gestion (statistiques). Tout récemment, pour me remercier, on m'a offert un poste temps. On n'a pas cessé de m'offrir de nouveaux défis comme enseignant, comme conférencier (ACPQ, journées

pédagogiques au Collège, AQPC), comme techno-pédagogue (pour écrire des articles sur ProfWeb, dans le magazine École Branchée).

Je tiens aussi à remercier une équipe fantastique chez Les Éditions CEC qui m'a permis de faire de la révision du manuel Calcul Différentiel pour eux, d'ajouter des exercices au fil des chapitres et d'ajouter à leur 2^{e} édition des laboratoires informatiques faisant alternance entre calcul écrit et utilisation judicieuse de GeoGebra. Cela a permis de me questionner comme professionnel sur les véritables enjeux de l'insertion de l'informatique en classe de mathématiques au collégial et sur les théories mathématiques que l'on enseigne dans le cadre des cours de calcul différentiel. J'ai pu grâce à CEC m'expliquer auprès de mes pairs enseignants dans d'autres collèges et cégeps. Je remercie cette maison d'édition pour sa confiance.

Je remercie aussi mes parents pour leur soutien moral inconditionnel, malgré qu'ils ne comprenaient pas toujours tout ce que ma recherche allait impliquer comme retombées. Je remercie M. André Boileau d'avoir débuté ce travail de recherche à mes côtés. Il a su me faire avancer dans mes questionnements en didactique. Je remercie particulièrement aussi M. Fernando Hitt, mon directeur de mémoire, pour ses questionnements continus qui m'ont permis de ne jamais perdre le fil de ma pensée avec les années, d'avancer, dans le cadre de ses cours, mes recherches pour mon mémoire, de ne pas me perdre entre le chapeau d'enseignant et celui de chercheur en didactique.

Un tout dernier remerciement à ma douce conjointe, Jessie Beauregard, d'avoir toujours confiance en moi. Son support continuel et son amour au quotidien ont pu rallumer en moi l'espoir de terminer un jour ce manuscrit malgré toutes les embûches et les épreuves que l'on a traversées ensemble.

Sur ce, bonne lecture à tous.

Charles Laporte

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Dans cette recherche, nous avons pour but premier d'observer les effets pédagogiques bénéfiques de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) dans l'apprentissage des limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales dans une classe de calcul différentiel (103) au Cégep en Sciences Humaines. Nous avons observé un faible taux de réussite de ce cours avec les années et nous avons voulu bonifier ce dernier en ajoutant certaines stratégies d'apprentissage et d'enseignement à celui traditionnellement utilisé pour cette matière. Il y a peu de recherches sur l'apport de la technologie sur l'apprentissage en mathématiques collégiales et nous avons voulu pousser notre recherche dans cette optique.

Nous débutons cette recherche avec une analyse de 4 manuels scolaires utilisés dans l'enseignement du calcul différentiel au niveau collégial. Nous avons remarqué une cohésion en termes de contenus sur les limites à l'infini dans 3 cas et un manuel semblait plus tendre vers l'utilisation de la visualisation mathématique. En général, les manuels écrivent souvent une erreur conceptuelle en calcul différentiel en égalant une limite à l'infini. La majeure partie indique que l'infini n'est pas un nombre, mais ils persistent à utiliser une égalité avec le symbole de l'égalité par son côté pratique, mais reconnaissant l'erreur à l'écrit. De plus, nous avons expérimenté, selon la méthodologie ACODESA (Hitt, Fernando Hitt - UQAM, 2008), avec les deux seuls étudiants de mon cours à l'automne 2017, une série de trois activités portant sur l'étude des limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales ainsi que sur les asymptotes qui sont reliées à ces fonctions.

Nous remarquons un enthousiasme notable des étudiants face à l'utilisation de GeoGebra dans leur apprentissage pour tester des hypothèses qu'ils ont esquissées et pour passer très aisément d'un mode de représentation à un autre (algébrique, symbolique, graphique) dans ce type d'étude.

Mots-clefs : Calcul différentiel, didactique des mathématiques, modes de représentation, logiciel de géométrie dynamique.

CHAPITRE I - PROBLEMATIQUE

1.1 INTRODUCTION

Je suis enseignant de mathématiques depuis l'hiver 2012 au niveau collégial. Être enseignant ne se limite pas à l'enseignement à proprement parler : enseigner c'est vulgariser, innover, évaluer de façon diagnostique, formative ou sommative, expliquer en d'autres mots, se rendre disponible pour des rencontres hors classe avec les étudiants, avec d'autres enseignants. Être enseignant, c'est réfléchir sur sa pratique au quotidien comme professionnel qui tente de transmettre le mieux possible son savoir à des étudiants de niveau collégial.

Au niveau québécois, la majorité des enseignants rapportent que le cours de calcul différentiel pour le programme de sciences humaines est un cours mal-aimé des étudiants et des enseignants qui le donnent. Par contre, on a certaines pistes qui nous indiquent à quel endroit il y a des lacunes. Une piste offerte est ressortie d'un consensus d'enseignants provenant d'un grand nombre d'établissements collégiaux (Collège LaSalle, Collège Rosemont, Cégep de Maisonneuve, Collège de Gatineau, Cégep de Sherbrooke, Collège de Lanaudière - (Laporte, 2016)) : les étudiants ne semblent pas posséder les préalables mathématiques nécessaires pour le cours de calcul différentiel en terme de préalables mathématiques, par exemple pour interpréter des graphiques de fonctions, pour relever les caractéristiques des fonctions à l'étude, pour factoriser différentes expressions algébriques, pour appliquer la technique du conjugué, pour appliquer les règles des exposants, des radicaux, etc.

Très souvent, dès le début de la session en Calcul Différentiel ou Calcul 1, les enseignants doivent effectuer une mise à niveau pour s'assurer que tous les étudiants partent du même niveau de compétence en algèbre et pour les fonctions. Vu que les étudiants proviennent d'univers différents (écoles secondaires différentes, commissions scolaires et enseignants variés, parfois même de pays différents), il est important de diagnostiquer les possibles difficultés des étudiants. Plusieurs enseignants opteront pour des tests diagnostics (tels que fournis chez les Éditions CEC) ou demanderont la lecture d'un chapitre préparatoire avec exercices d'appui mettant en jeu les concepts nommés précédemment. Au Collège LaSalle, nous accueillons un bon nombre d'étudiants internationaux qui n'ont pas le même bagage académique aussi bien du côté mathématique que du côté linguistique que les étudiants provenant d'écoles québécoises. Par ailleurs, certains de nos étudiants ont vécu des échecs dans d'autres cégeps, en effet, une part d'étudiants choisissent le Collège LaSalle par son aspect privé et parce que les groupes sont plus petits, facilitant ainsi le contact avec l'enseignant. L'échantillon que nous étudierons sera formé d'étudiants francophones du cours de Calcul 1 en Sciences Humaines de ce Collège, où j'enseigne.

Dans la prochaine section, nous présenterons des statistiques autour de la réussite du cours de calcul 1 en sciences humaines ainsi que les différentes difficultés ressenties par les étudiants par rapport à la réussite du cours.

1.2 STATISTIQUES AUTOUR DE LA RÉUSSITE DU COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL (CALCUL 1 EN SCIENCES HUMAINES)

Dans son étude, Fréchette (2010) rapporte les taux de réussite obtenus au Collège Édouard-Monpetit pour le cours de calcul différentiel pour les étudiants provenant du profil administration[1].

[1] Profil de sciences humaines avec mathématiques axé sur la gestion et l'administration

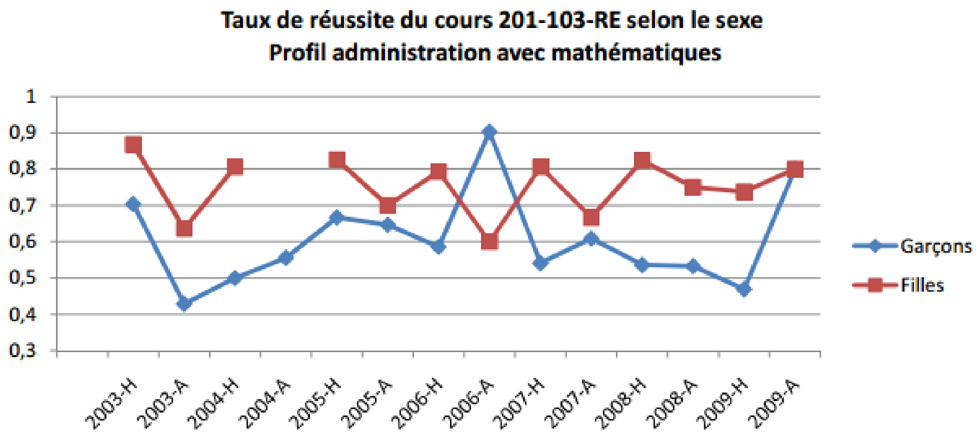


Figure 1.1: Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe - profil administration avec mathématiques au Collège Édouard-Montpetit (Fréchette, 2010), en page 57

On voit généralement, de 2003 à 2009, que les garçons ne réussissent pas très bien le cours de Calcul 1 avec des taux de réussite souvent en bas de 70% alors que les filles ont en tout temps un taux de réussite égal ou supérieur à 60%, ce qui viendrait supporter mon préjugé en 1.1. On peut donc comparer ces groupes à ceux du Collège LaSalle, car il s'agit du même programme et du même profil. De plus, Fréchette (2010) présente les taux de réussite pour les étudiants inscrits au Profil monde avec mathématiques[2].

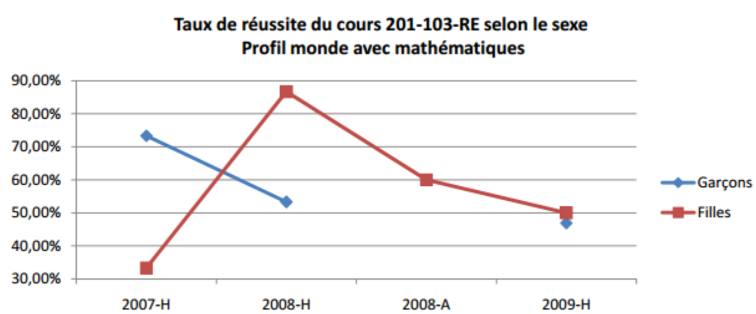


Figure 1.2: Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe Profil monde avec mathématiques au Collège Édouard-Montpetit (Fréchette, 2010) en page 66

---

[2] Profil caractérisé par la compréhension du monde qui entoure les étudiants par des matières communes comme la géographie l'économie, la psychologie, avec un apport en mathématiques.

Encore ici, dans le profil Monde avec mathématiques, on remarque que les filles sont généralement plus fortes que les garçons en Calcul 1, car leur taux de réussite est plus élevé deux fois sur quatre. Par contre, tout sexe confondu, il n'y qu'un taux de réussite au-dessus de 75%. Cela montre une certaine faiblesse en Calcul différentiel dans ce profil. Toutefois, il faut prendre en considération que nous ne connaissons pas le nombre total d'étudiants participants à cette étude ni leur niveau de motivation, ni s'il y a un impact enseignant (toujours le même enseignant qui donne le même cours ou toujours un enseignant différent qui donne ce cours), etc. De nombreuses raisons peuvent influencer ces résultats, il est important de considérer le contexte dans lequel les données ont été prises.

No cours	Titre du cours	Session	N inscr H-14	N réussi H-14	% H-14	% H-13	% H-12	Sur 3 ans
Sciences humaines (300.A0)								
201-103-RE	Calcul I	2	77	52	67,53	59,83	49,44	58,93

Figure 1.3: Taux de réussite du cours 201-103-RE au Collège Ahuntsic en sciences humaines (Ahuntsic, 2014)

La figure 1.3 montre les taux de réussite du cours de Calcul 1 en Sciences Humaines au Collège Ahuntsic aux sessions hiver 2014 (67,53%), hiver 2013 (59,83%) et hiver 2012 (49,44%). Comme pour le collège Édouard-Montpetit, on remarque que le cours de Calcul 1 est problématique quand à la réussite dans ce Cégep. Il est ciblé comme un cours écueil tout comme au Cégep Édouard-Montpetit, à cause d'un taux de réussite inférieur à 70%.

L'intérêt serait d'aller explorer le cours de Calcul 1 au niveau du Collège LaSalle pour lequel les étudiants ressentent des difficultés. J'ai donné ce cours à trois occasions, à l'automne 2013, à l'automne 2015 et à l'automne 2016. En retournant dans mes dossiers académiques, j'ai pu noter que globalement, 78% des étudiants ont passé le cours, mais ce pourcentage est négligeable vu le faible nombre d'étudiants à l'étude sur ces 3 sessions.

Différentes raisons peuvent expliquer la raison de l'échec de certains étudiants :

- l'étudiant ne se présente plus en classe au bout de quelques cours et échoue donc par absence, car le Collège LaSalle s'est doté d'une politique d'absence qui amène un échec s'il y a des absences trop fréquentes ;
- l'étudiant ne possède pas les compétences algébriques élémentaires pour suivre le cours. Par exemple, il ne sait pas dériver que ce soit en utilisant la définition ou en passant par les formules de dérivation ;
- il nuit à sa réussite en s'absentant lors de plusieurs cours importants, ne questionnant pas son enseignant pour rattrapper la matière manquée ou pour avoir des réponses à ses questions ;
- il ne possède que peu de rigueur autant dans les processus mathématiques véhiculés à l'oral que dans la façon de les élaborer à l'écrit.

En bref, il y a de nombreux facteurs pouvant influencer le taux de réussite dans le cadre de ce cours selon le Cégep ou le Collège : le sexe d'un étudiant, les compétences préalables langagières et mathématiques (TS ou SN de 5^{e} secondaire), le taux d'absentéisme, l'effet « prof » (englobant ses méthodes d'enseignement, sa pédagogie, son dynamisme, son type de correction), la session (automne, hiver ou été) qui modifie l'enthousiasme des étudiants face à un cours selon la température et l'ensoleillement, etc.

Dans le cadre de notre étude, nous ne donnons que le cours Calcul 1 à la session automne. L'enseignant est Charles Laporte, le chercheur. Le taux d'absentéisme est géré par la politique d'échec par absence du Collège. Or, ces trois variables sont peu ou pas importantes dans notre problématique. Par expérience, je peux affirmer que le bât blesse quant aux compétences préalables.

1.3 POLITIQUES D’AIDE À LA RÉUSSITE

Les différents Cégeps et Collèges proposent différentes solutions pour résoudre le problème de préalables des étudiants. Certains établissements proposent un cours de mise à niveau en mathématiques TS5 ou SN5 (Lionel-Groulx, Ahuntsic et Rosemont par exemple) en Tremplin DEC, programme dans lequel les étudiants vont chercher les préalables manquants.

D’autres institutions offrent un programme de tutorat par les pairs. Ce service consiste à pairer un ancien étudiant ayant bien réussi le cours avec un étudiant le suivant et éprouvant des difficultés. De nombreux Cégeps (Vieux-Montréal, Lionel-Groulx, F-X-Garneau, Ahuntsic, Granby, Outaouais, etc.) offrent ce service qui est bien apprécié et qui a fait ses preuves quant à l’augmentation du taux de réussite du cours. Cartier et Langevin (2001) ont fait une recherche qui démontrent l’efficacité de l’aide par les pairs et l’augmentation des taux de réussite alors que Barbeau (2007) en démontre un impact négatif. Toutes ces recherches estiment qu’il faut prendre les résultats avec un grain de sel vu le faible nombre de participants à l’étude.

De plus, certains établissements proposent un centre d’aide en mathématiques piloté par les enseignants de mathématiques qui y travaillent. Parfois, les tuteurs (anciens étudiants) aident les enseignants à combler les disponibilités données par le centre. Les Cégeps de Saint-Félicien, Montmorency, Lionel-Groulx, Ahuntsic, Trois-Rivières, Saint-Laurent, F-X-Garneau, Vieux-Montréal, Saint-Jean-sur-Richelieu et Maisonneuve (entre autres) offrent ce type de service aux étudiants. Le Collège LaSalle a débuté le Centre d’aide en mathématiques à la session automne 2017.

Au Collège LaSalle, il n’y a pas le cours préalable offert (TS5 ou SN5) afin de s’inscrire au cours de Calcul 1. Par contre, tous les inscrits québécois ont dû réussir ce cours pour avoir le droit de s’inscrire. Nous n’avons pas vraiment le contrôle sur les étudiants internationaux et leurs préalables. Vu la petitesse de la clientèle que nous avons en mathématiques en sciences humaines (généralement en bas de 20 étudiants), nous n'avons pas senti la nécessité de monter un programme de tutorat par les pairs à ce Collège.

Par contre, les enseignants temps plein doivent être disponibles trois heures par semaine pour aider à la réussite de leurs étudiants, pour répondre à leurs questions, pour apaiser leur inquiétude. Ces trois heures font partie de notre tâche, mais ces heures peuvent être effectuées en présentiel ou à distance. Les enseignants chargés de cours n'ont pas cette obligation. Les enseignants temps plein ont préparé du matériel supplémentaire pour aider ceux dont les préalables au cours de calcul 1 sont faibles ou absents et ce, à défaut d'avoir accès au cours de mise à niveau TS5/SN5. Dans ce matériel on retrouve des documents de révision (versions papier et électronique) des différents sujets abordés dans le cadre de ces cours au secondaire. De plus, les enseignants à temps plein sont en train de penser à créer une banque de vidéos récapitulatifs de certains sujets de mathématiques du secondaire importants pour suivre les études collégiales : la factorisation, la distributivité, les identités remarquables, etc. Une nouveauté depuis l'automne 2016 : les enseignants temps plein se rencontrent une fois aux deux semaines pour parler de pédagogie et d'enseignement des mathématiques afin de favoriser un arrimage entre les cours du profil francophone et du profil anglophone du Collège. Nous pensons que toutes ces idées pourront aider nos étudiants (à l'étude dans cette recherche).

1.4 PROBLÈMES D'APPRENTISSAGE PROVENANT DU SECONDAIRE

1.4.1 COMPETENCE EN NOTATION MATHEMATIQUE

Un problème frappant et persistant depuis le secondaire est la « paresse du crayon ». Quand vient le temps d'effectuer des calculs répétés de limites sur papier, l'étudiant, en général, *oublie* de garder lors de ses calculs des notations importantes telles que : $\lim_{x \to a}$ ou une part de calculs importants tout au long du processus. Cela amène différentes erreurs : une réponse erronée à cause de portions non calculées, l'oubli de la limite que l'on calculait, des simplifications erronées ou des factorisations erronées. L'important est de montrer à l'étudiant que la notation mathématique est importante. Pourquoi ne pas se doter d'un élément de compétence telle que la CD3 (Compétence disciplinaire 3) au niveau secondaire? Le langage mathématique est fort important. Pourquoi ne pas défendre sa place et montrer qu'il est important de le respecter en montrant les effets de ne pas continuer l'utilisation de la notation complète dans un calcul? On a en effet inclus la notation mathématique écrite comme critères de performance du cours pour aider lors de la correction, mais pas comme élément de compétence porteur. (Collège LaSalle, 2016).

Éléments de la compétence	***Critères de performance particuliers à chaque élément***
1. Situer le contexte historique du développement du calcul différentiel. 2. Reconnaître et décrire les caractéristiques des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques, chacune représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique. 3. Analyser le comportement d'une fonction représentée symboliquement ou graphiquement à l'aide de l'approche intuitive du concept de limite. 4. Définir la dérivée d'une fonction, donner son interprétation et appliquer les techniques de dérivation. 5. Analyser les variations d'une fonction en utilisant le calcul différentiel. 6. Résoudre des problèmes de taux de variation et d'optimisation.	• Connaissance élémentaire du contexte historique du développement du calcul différentiel. • Utilisation appropriée des concepts. • Représentation adéquate d'une situation sous forme de fonctions. • Représentation graphique adéquate d'une fonction. • Manipulations algébriques conformes aux règles. • Choix et application correcte des règles et des techniques. • Exactitude des calculs. • Justification des étapes de la résolution des problèmes de taux de variation et d'optimisation. • Interprétation juste des résultats. • Utilisation d'une terminologie appropriée.

Figure 1.4: Éléments de compétence et critères de performance du cours de calcul I – 201-103-AS au Collège LaSalle

Une étude sur les troubles de l'apprentissage indique ce qui suit.

> *Les troubles d'apprentissage sont des handicaps invisibles. Nous sommes donc parfois portés à attribuer à la paresse ou le manque d'intérêt les difficultés de la personne. ((Pelletier, 2004) en page 3)*

J'ai donc peut-être un préjugé défavorable, comme enseignant, par rapport à certains types d'étudiants utilisant leur TDAH (troubles du déficit d'attention avec ou sans hyperactivité) ou leur trouble d'apprentissage comme étant une raison pour ne pas prendre de notes de cours ou pour ne pas écrire la notation mathématique adéquate en tout temps. L'utilisation d'un outil informatique afin de prendre des notes de cours efficaces est une option intéressante. Elle cesse de l'être quand l'étudiant ne fait que prendre des photos sans raisonner ou cogiter sur les problèmes. On comprendra donc que certains étudiants, qui sont à l'étude ici, pourraient prendre des photos du tableau avec les explications de l'enseignant mais ils ne les annotent pas et ils ne font pas d'exercices de renforcement par la suite, tout en se croisant les bras. Est-ce une attitude qui fut acceptée dans leurs études antérieures? Il faudra alors casser cette façon de faire si ces étudiants veulent aller vers le chemin de la réussite tout en pratiquant la théorie avec des exercices pratiques. De plus, selon le point de vue emprunté à Pelletier (2004), les exigences pour l'apprentissage des concepts du calcul demandent beaucoup de travail de la part de l'étudiant. Si celui-ci a des lacunes en géométrie, en algèbre, en géométrie analytique ou même en arithmétique, il aura des problèmes lors de l'apprentissage du calcul. Si l'étudiant a appris par cœur les mathématiques au secondaire, au collégial, il aura sûrement déjà oublié une partie des mathématiques apprises au secondaire. Confronter les concepts propres du calcul différentiel demande beaucoup d'effort et, en général, les étudiants ne sont pas habitués à ce type de demandes.

1.4.2 DIFFICULTES ET ERREURS CONCEPTUELLES RECENSÉES

De nombreuses difficultés mathématiques ou erreurs conceptuelles persistent suite au passage au secondaire comme la continuité dans l'ensemble des réels, la notation d'inclusion et d'exclusion, la nature de l'infini, etc.

Il y a un point important soulevé par Páez Murillo (2005) qui tourne autour de l'idée que les nombres réels sont continus. L'idée que, entre chaque nombre, il y ait encore une infinité de nombres réels, peut paraître farfelue pour certains étudiants au collégial, car ils ne maîtrisent pas le concept des ensembles de nombres étudiés au secondaire ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$). Que 0,9 soit près de 1, que 0,99 soit encore plus près de 1, que 0,999 soit encore plus près de 1 et qu'il y ait encore des nombres cachés entre 0,999 et 1 sont des concepts difficiles parfois pour les étudiants. Ce problème peut être relié à celui de la d'infini, ce dernier n'étant pas un nombre réel. (Nous y reviendrons au point 1.6). Nous reprendrons ici cinq des questions posées par Drolet et qui illustrent les difficultés ressenties par les étudiants autour du concept de fonction.

De là découle un sous-problème : la notation d'inclusion et d'exclusion sur un intervalle. En calcul 1, nous étudions souvent des fonctions définies par parties et c'est un type de fonctions qui cause problème chez les étudiants, souvent parce qu'ils ont oublié l'étude faite au secondaire. Nous ne blâmons pas les enseignants du secondaire. Il serait toutefois intéressant de dégager les différentes notations possibles pour définir une fonction par parties. Voici un exemple de fonction définie par parties décrite en utilisant différentes notations :

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \in]-\infty, -2[\\ 0 & si\ x \in [-2, 2] \\ x & si\ x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

Est équivalente à

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < -2 \\ 0 & si -2 \leq x \leq 2 \\ x & si\ x > 2 \end{cases}$$

Différentes observations peuvent être faites à partir de cet exemple. Tout d'abord, la question légitime de si on inclut ou pas l'infini dans l'intervalle peut être posée. Comme l'infini n'est techniquement pas un nombre fini mathématiquement parlant, on ne doit pas l'inclure. (Nous y reviendrons au point 1.6). Par rapport aux fonctions, Drolet (2012) a effectué une recherche sur le concept de fonction, recherche menée avec des étudiants nouvellement arrivés du secondaire en Calcul I.[3] Drolet a fait remplir un questionnaire sur la compréhension qu'ont les étudiants du concept de fonction ainsi que la visualisation utilisée. Nous reprenons ici cinq questions présentées par Drolet aux étudiants et les résultats associés.

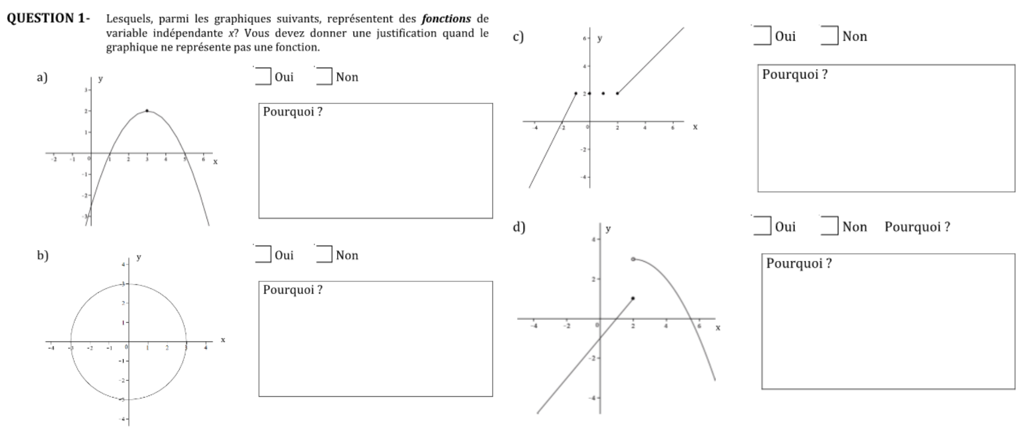


Figure 1.5 : Énoncé de la question 1 traitant de la conception qu'ont les étudiants sur ce qu'est une fonction - (Drolet, 2012) en pages 143 et 144

Le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche selon le graphique proposé

	Nombre d'étudiants	
Type de graphique	Sciences naturelles	Technico-sciences
Tâche a) => Parabole	146	28
Tâche b) => Cercle	85	15
Tâche c) => Courbe discontinue	89	19
Tâche d) => Courbe discontinue (de domaine ℝ)	86	22

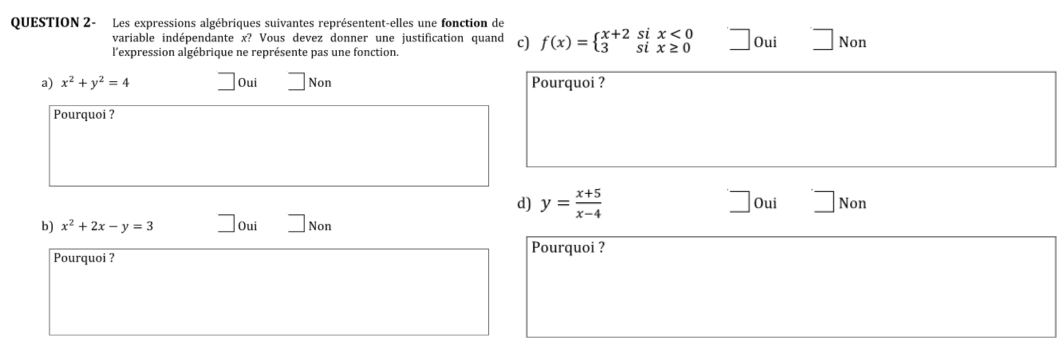
Figure 1.6: Nombre d'étudiants ayant réussi la question 1 sachant qu'il y en a 154 de SN et 29 de TS – (Drolet, 2012) en page 93

Comme première question, Drolet propose quatre types de représentations graphiques : une parabole, un cercle et deux courbes discontinues. Il cherchait à comprendre ce que les étudiants considéraient comme une fonction et pourquoi.

---

[3] Chacune des images (5 à 9) proviennent de la recherche de Drolet. Drolet, D. (2012, octobre 1). *Évaluation du niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction*. Consulté le décembre 03, 2016, sur archipel: http://www.archipel.uqam.ca/5193/1/M12670.pdf

Sachant qu'il y avait 154 étudiants issus du profil SN et 29 de TS, comme la figure 1.6 nous l'indique, il y a un fort pourcentage de réussite à sa question pour ce qui est d'une courbe quadratique, certainement car c'est une figure vue et étudiée durant les cours de mathématiques de 4e et 5e secondaire. Le taux de réussite baisse drastiquement devant le cercle et les deux fonctions discontinues. Pour le cas du cercle, cela signifie que l'on n'expliquerait pas assez bien la distinction entre un conique (cercle, parabole horizontale, hyperbole, ellipse) et les fonctions. La conique échoue au test de la droite verticale, test « visuel » utilisé pour démontrer si on est face à une fonction ou pas. Ainsi, les fonctions discontinues ne sont pas considérées comme étant des fonctions par une large part des étudiants. On peut expliquer ceci par plusieurs raisons. En effet, la majorité des fonctions vues au secondaire sont presque toutes continues sur tout leur domaine de défintion, les fonctions affine, quadratique, exponentielle, logarithmique, valeur absolue, sinusoïdale, cosinus, tangente, rationnelle, racine carrée, etc. Une autre raison est que l'on passe trop peu de temps sur l'apprentissage des fonctions par parties que cet apprentissage n'esst pas significatif pour l'étudiant. Une troisième raison réside dans l'idée de ce qu'est une fonction : « Pour chaque valeur en abscisse, il y a 0 ou une valeur en ordonnée. ».



QUESTION 2- Les expressions algébriques suivantes représentent-elles une **fonction** de variable indépendante x? Vous devez donner une justification quand l'expression algébrique ne représente pas une fonction.

a) $x^2 + y^2 = 4$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

b) $x^2 + 2x - y = 3$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

c) $f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

d) $y = \frac{x+5}{x-4}$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

Figure 1.7: Énoncé de la question 2 traitant de la compréhension des étudiants d'une fonction par rapport à son équation - (Drolet, 2012) en page 144 et 145

Les équations proposées selon le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche

Type d'équation	Nombre d'étudiants	
	Sciences naturelles	Technico-sciences
Tâche a) → Cercle	53	1
Tâche b) → Parabole (forme implicite)	120	17
Tâche c) → En deux parties	77	7
Tâche d) → Rationnelle	123	18

Figure 1.8: Nombre d'étudiants ayant réussi la question 2 sachant qu'il y en a 154 de SN et 29 de TS – (Drolet, 2012) en page 91

Il s'agit dans cette question de voir si les étudiants arrivent à reconnaître les fonctions à partir d'équations données. La parabole et la fonction rationnelle sont généralement correctement identifiées comme étant des fonctions, car elles sont usuellement à l'étude et restent en mémoire. Le cercle (conique) et la fonction définie par parties ne sont vues comme fonctions que par une faible proportion des étudiants pour les raisons présentées précédemment. La question 11 confirme le problème nommé en début de section sur la notation d'inclusion et d'exclusion ainsi que sur les contraintes. Le tiers des étudiants ne réussit pas à trouver l'équation de cette fonction par parties assez simpliste.

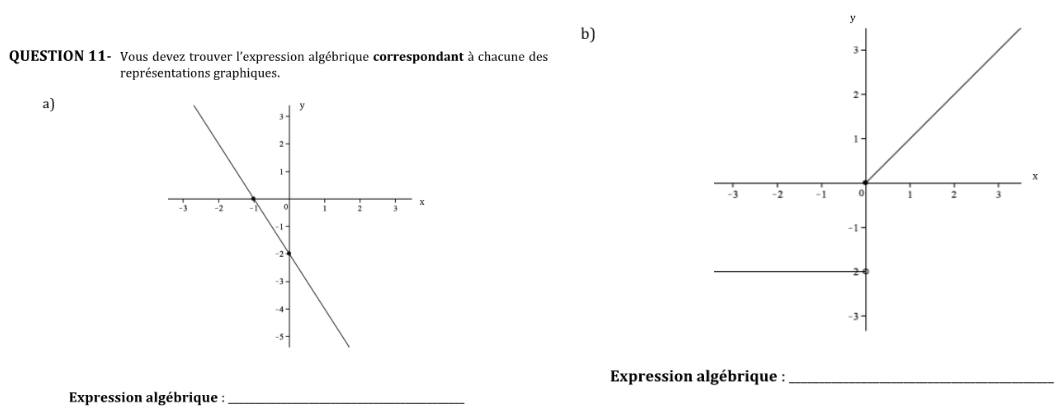


Figure 1.9: Énoncé de la question 11 traitant du passage du mode de représentation graphique à algébrique - (Drolet, 2012) en page 151

Tableau des réponses à la question 11b

Réponse à la question 11b	Nombre d'étudiants Sciences naturelles	Nombre d'étudiants Technico-sciences
Ont réussi à trouver l'équation de la fonction définie par parties	**30**	**0**
Ont fait une erreur d'inclusion	8	3
N'ont pas donné les contraintes de la fonction définie par parties	28	7
Ont confondu les écritures ensembliste et fonctionnelle	4	2
N'ont pas trouvé les bonnes équations	51	8
Sans réponse	33	9
Total	154	29

Figure 1.10: Nombre d'étudiants ayant réussi la question 11b) - (Drolet, 2012) en page 107

QUESTION 3- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

1) $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ 2) $g(x) = 1 + \frac{7}{x-5}$

☐ Oui ☐ Non

Justification

Figure 1.11: Énoncé de la question 3 portant sur l'équivalence d'expressions algébriques - (Drolet, 2012) en page 145

La question 3 du questionnaire de Drolet (2012) montre certaines difficultés flagrantes en algèbre. La question présente deux fonctions et on désire démontrer si elles sont équivalentes ou pas. Dans le premier cas, une simple division polynomiale ou un dénominateur commun aurait suffi pour convertir l'une dans une forme équivalente. Moins de 50% des étudiants de SN et de TS ont réussi cette sous-question. Dans le second cas présenté, une factorisation permet de simplifier la seconde écriture de la fonction, mais si la simplification est appliquée, elle supposet que la fonction n'est pas continue en x = -1 et ce n'est pas le cas. Or, un seul étudiant de SN a réussi cette question selon les critères.

QUESTION 5- Vous devez esquisser le graphique de chacune des fonctions de variable indépendante x.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Figure 1.12: Question 5 portant sur le traçage de graphique – (Drolet, 2012) en page 146

La question 5 est assez intéressante pour un enseignant de Calcul I. L'un des buts ultime du cours est l'habilité de tracer le graphique d'une fonction. Si de simples fonctions comme celles de la figure 1.12 représentent une embûche (réussite de 14% à la fonction rationnelle et 32% pour la fonction racine), il sera difficile d'avancer pour certains étudiants. Une bonne mise au point s'imposera donc pour certains d'entre eux.

Le nombre d'étudiants qui a répondu correctement à toutes les tâches proposées selon le registre de représentation et la séquence d'enseignement

	Nombre d'étudiants		
Registre de représentation	Sciences naturelles	Technico-sciences	
Graphique	60	13	73
Symbolico-algébrique	31	0	31
Langue naturelle	54	6	60

Figure 1.13: Nombre d'étudiants ayant réussi les questions selon le type de représentation sachant qu'il y en a 154 de SN et 29 de TS – (Drolet, 2012) en page 120 (ou Tableau 4.27 chez Drolet)

La figure 1.13 (ou le tableau 4.27 de Drolet) rapporte la réussite des activités proposées dans ce questionnaire. On y voit précisément que les registres graphiques et de la langue naturelle sont porteurs de sens pour les étudiants de SN et TS. Par contre, le registre symbolico-algébrique est source de grandes difficultés pour environ 4/5 des étudiants de SN et pour tous les étudiants de TS. L'écriture symbolique en algèbre pose donc donc un problème. Par contre, la trigonométrie ne semble pas être un problème pour les étudiants participants à l'étude du questionnaire de Drolet (2012), mais nous ne nous soucierons pas de cet aspect, car les fonctions trigonométriques sont exclues généralement de l'enseignement du cours 201-103 au collégial, à tout de moins au Collège LaSalle. En résumé, algèbre, simplification, division polynomiale, factorisation, contraintes, inclusion, exclusion, fonction par parties sont tous des problèmes auxquels l'on doit se ramener dans les premiers cours d'une session en Calcul I.

D'autres problèmes sont à prévoir en ce qui a trait à la modélisation mathématique, à la géométrie analytique et à la géométrie.

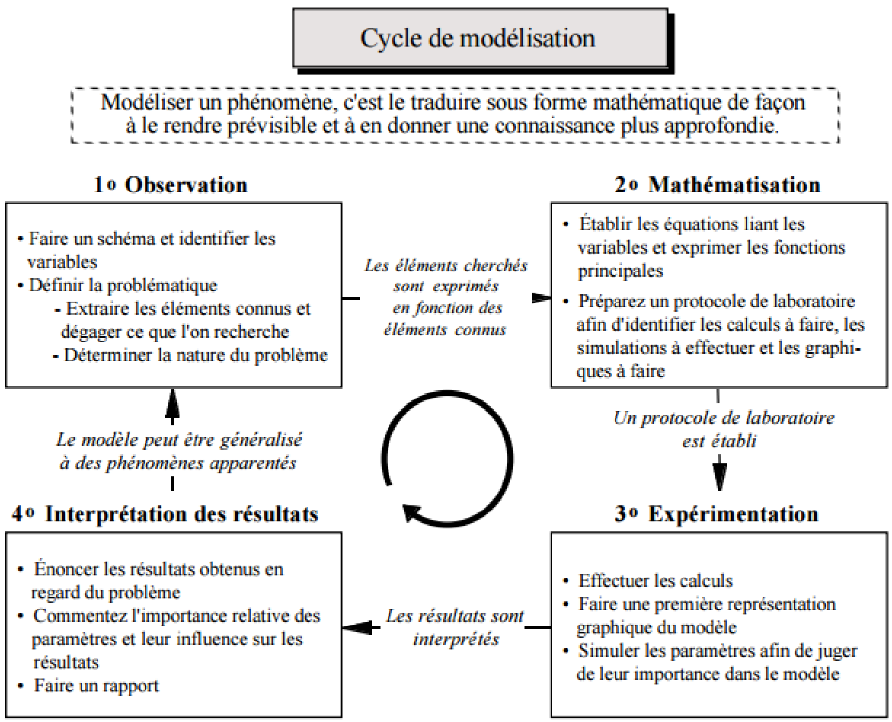


Figure 1.14: Cycle de modélisation mathématique (Etchecopar, 2007) en page 6

Le schéma précédent (Figure 1.14) présente le cycle de modélisation mathématique qui devrait être utilisé par les étudiants dans le cadre de la résolution de problèmes. Ce processus provient des travaux de Polya, présentés par Davis et Hersh (1986) est bien explicité et schématisé par Finney, Thomas, Demana et Waits (2005) dans *Calculus a graphing approach* (Thomas, Finney, Demana, Waits, 2005).

Selon Etchecopar, on pourrait définir les différentes étapes de la modélisation comme suit :

- Premièrement, on doit passer par une phase d'observation des données. Celle-ci peut impliquer l'identification des variables, d'esquisser un schéma représentatif de la situation[4], de déterminer la problématique (ce que l'on cherche en fait) et d'établir une hypothèse. C'est l'étape numéro 1 que certains étudiants essaient de sauter.
- Deuxièmement, on passe à l'étape de la mathématisation du problème. Cette étape est légèrement plus compliquée, car elle consiste à passer à la mise en équation ou fonction de ce que l'on connaît, de ce qui nous est donné au préalable. On effectue ensuite la rédaction d'un « rapport de laboratoire » : c'est un peu l'idée d'établir le protocole de laboratoire, les manipulations qu'on aura à faire avec nos données, nos fonctions, nos équations. Les manipulations consistent à la liste non-exhaustive de nos calculs à effectuer, les représentations graphiques à produire, la simulation en faisant varier certains paramètres des fonctions ou équations à l'étude.
- La troisième étape consiste à passer en « laboratoire » afin de faire les calculs, nos représentations graphiques et la simulation désirée.
- La quatrième étape est celle de l'interprétation des résultats où il faut donner du sens aux résultats que l'on trouve selon le contexte du problème. (D'où l'importance d'avoir de bons problèmes contextualisés durant le cours de calcul différentiel!) On peut aussi discuter de l'apport des différents paramètres des équations ou fonctions à l'étude et rédiger ensuite un « rapport » en bonne et due forme. Cela consisterait à rendre sur papier les

---

[4] Je dis souvent à mes étudiants qu'un dessin vaut mille mots et je donne des points à ceux qui me font un schéma représentatif pour ne pas qu'ils esquivent cette étape cruciale du processus de modélisation.

résultats de notre quête mathématique. Cela nous facilitera ensuite la tâche pour des problèmes mathématiques similaires.

Le problème réside dans le fait que de nombreux enseignants du secondaire sont parfois mal outillés pour opérer avec la CD1 (Compétence Disciplinaire 1) : « Résoudre une situation-problème » (MEES, 2011) ainsi que la modélisation mathématique qui y réside souvent. La CD1, si on la décompose en critères pour l'évaluation, est déterminée selon 4 critères spécifiques :

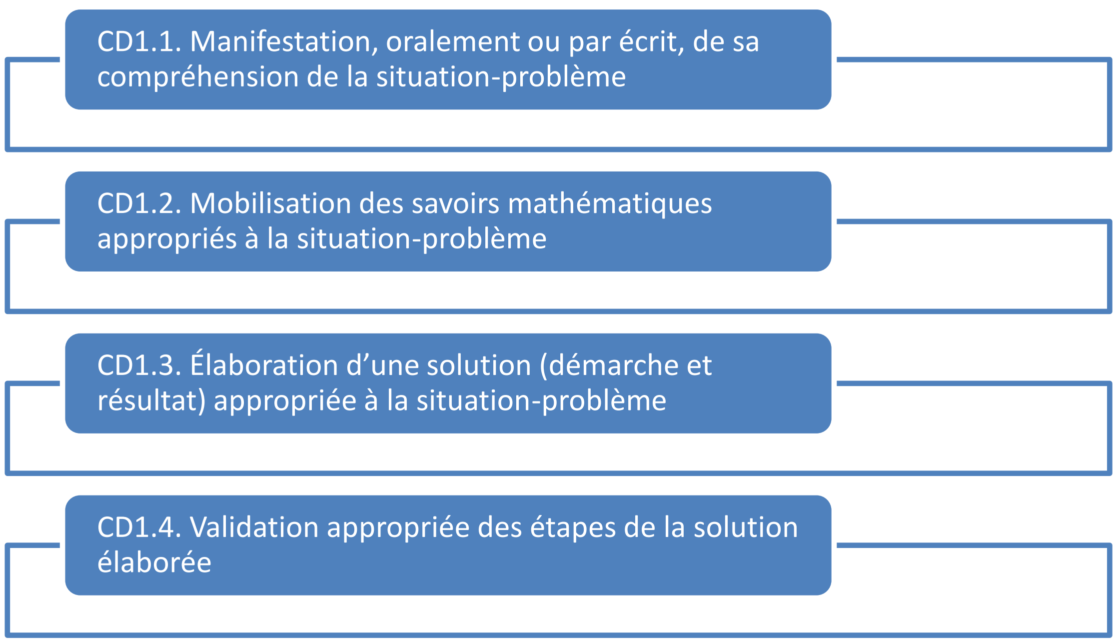


Figure 1.15: Détails de la compétence 1 (Tremblay, 2011)

Si l'on regarde de façon approfondie les critères spécifiques établis par le MEES, on peut voir un lien assez fort entre les critères et les 4 étapes du processus de modélisation mathématique. Donc, dès le secondaire, les étudiants arrivant au collégial se sont frottés à ce processus mathématique et connaissent généralement les étapes pour solutionner un problème mathématique s'ils ont les prérequis pour y arriver.

Des facteurs importants, à mes yeux, qui influencent le rapport qu'ont les étudiants face à la modélisation mathématique sont :

- S'ils font la modélisation seuls ou en équipe;
- S'ils souffrent d'un problème d'apprentissage, d'un déficit d'attention, d'une maladie mentale ou d'un TDAH;
- S'ils connaissent les étapes d'une bonne modélisation;
- S'ils sont mentalement prêts à se mettre au boulot;
- S'ils ont accès à un matériel informatique ou technologique[5] adéquat pour favoriser la visualisation (pas mal l'objet de notre recherche).

En ce qui concerne la géométrie analytique, les enseignants du collégial soulignent que de nombreux concepts sont encore à revoir au niveau du collégial : certains étudiants sont relativement faibles en ce qui a trait à l'utilisation du plan cartésien. Il y a, tout d'abord, une confusion qui persiste chez certains entre la variable indépendante et la variable dépendante : cela se traduit aussi en leur utilisation du plan cartésien. En donnant un nuage de points à représenter dans le plan XY, on a souvent droit à des réponses où l'on place les ordonnées sur l'axe des abscisses et les abscisses sur l'axe des ordonnées. Un simple rappel est suffisant pour rappeler à l'étudiant d'identifier les « x » en premier et ensuite les « y », que x et y se suivent dans l'alphabet… il en va de même pour abcisses et ordonnées.

Dans le cadre d'une situation contextualisée, il est difficile pour les étudiants, règle générale, d'identifier laquelle des deux variables est l'indépendante et laquelle est

[5] Selon le dictionnaire Larousse (en ligne), la technologie est vue comme étant l'ensemble des outils et des matériels utilisés dans l'artisanat et dans l'industrie. Cela n'implique pas nécessairement l'utilisation d'un ordinateur ou d'une calculatrice. La technologie peut aussi être vue comme étant un ensemble cohérent de savoirs et de pratiques dans un certain domaine technique, fondé sur des principes scientifiques. L'utilisation de techniques et méthodes apprises antérieurement dans le cadre du cours peut être vue comme une technologie. L'utilisation de la méthode de la bissection pour trouver les réponses à une équation de degré 3 serait un exemple de technologie. (Larousse, 2016)

dépendante. Même vers la fin de session d'un cours de calcul différentiel, un étudiant peut éprouver des difficultés à identifier la nature de ses variables surtout devant un problème d'optimisation ou de taux liés. Mon truc mnémotechnique pour identifier correctement la nature des variables à l'étude est simple : je questionne les étudiants à savoir comment ils réagissent en relation de couple, s'il y a au moins un dépendant affectif. C'est alors que j'explique que les réponses de cette personne varieront en fonction de l'autre variable du couple : la variable indépendante, la personne indépendante. La personne indépendante pourrait choisir de sortir de son côté ; la personne dépendante subira les conséquences de sa décision. Si l'étudiant peut déjà identifier la nature des variables, ce sera déjà bien pour le pan de cours à l'étude dans cette recherche, situé près des limites.

Les notions de distance, de perpendicularité, de parallélisme, de solutions pour un système d'équations et de tangente ou d'asymptote sont des concepts assez difficiles pour certains étudiants à leur arrivée au cours de calcul différentiel. Une révision est de mise. Pour la notion de distance, le théorème de Pythagore est le meilleur moyen pour l'expliquer et y donner du sens dans un système cartésien orthonormé[6]. On fixe Δx comme la différence entre les abscisses $(x_2 - x_1)$ et Δy comme la différence entre les ordonnées $(y_2 - y_1)$. On symbolisera la distance entre les deux points par la lettre d. Or, par Pythagore, $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = d^2$. Si l'on isole la distance, on obtient la formule :

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pour savoir si deux droites sont parallèles, perpendiculaires ou simplement sécantes, les trucs du secondaire sont efficaces. Il ne suffit que d'isoler la variable dépendante de chacune des équations sous la forme $f(x) = a \cdot x + b$ où a symbolise la pente de la droite. Si les droites ont la même pente, elles sont nécessairement parallèles. Si

[6] Parce que les étudiants ont connu, par le passé, des systèmes difformes…

elles ont le même ordonnée à l'origine, elle seront parallèles confondues. Sinon, elles seront parallèles distinctes. En multipliant les pentes, si l'on obtient un total de -1, les droites seront considérées perpendiculaires. Dans les autres cas, les droites seront sécantes, elles ne couperont pas à angle droit. Pour les solutions de systèmes d'équations de deux droites, la pratique des méthodes vues au secondaire (comparaison, substitution, réduction ou addition-produit) sont à revoir et à réviser. Si les étudiants ont eu le cours d'algèbre linéaire et géométrie vectorielle avant le cours de calcul différentiel, ils peuvent utiliser la technique de Gauss-Jordan s'ils le désirent. Cela se complique si l'on cherche les points d'intersection entre une droite et une fonction de second degré. On suggère généralement la substitution et l'utilisation de la formule pour trouver les zéros d'une fonction quadratique à une inconnue de la forme $y = ax^2 + bx + c$ $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$. C'est la méthode privilégiée par pas mal d'enseignants au post-secondaire.

Les notions de tangente et d'asymptote ont été introduites généralement en 4^e ou 5^e secondaire. La notion de tangente est associée notamment au cercle en géométrie. On définit ici la tangente comme étant une droite qui n'aurait **qu'un point de contact au cercle** et qui est **perpendiculaire au rayon de ce dernier**[7]. C'est pas mal cette définition qui restera en mémoire. Les asymptotes sont vues, quant à elles, avec les coniques en 5^e secondaire ou avec les fonctions comportant un comportement asymptotique (exponentielle, logarithmique, tangente, rationnelle entre autres). Les étudiants arrivant en calcul différentiel ont une définition plus ou moins correcte de la notion d'asymptote, on peut avancer quelques pistes d'explication :

- Les enseignants font tracer les asymptotes en même temps que le graphique. Les étudiants pensent alors que l'asymptote fait partie de la fonction. A

[7] Quand on parle de dérivée, on parle de pente de tangente à la courbe, mais celle-ci a souvent plus d'un point de contact avec la courbe. Cela devient contre-intuitif pour les étudiants. On parle alors d'un certain voisinage pour éloigner le problème.

contrario, d'autres étudiants pensent que c'est une droite imaginaire et que l'on ne doit surtout pas la tracer ou la connaître dans le cadre d'un problème avec des fonctions.

- Les étudiants pensent que la fonction touche à un moment donné à l'asymptote, car certains enseignants peuvent le faire penser ainsi. Ils amèneront alors ici une idée de l'infini potentiel que nous explorerons au point 1.5 (problématique possible lors du passage de l'idée d'infini potentiel à l'infini actuel explorée par Brousseau et Bachelard (Dufour, 2011)).
- L'asymptote d'une fonction exponentielle est toujours $y = 0$ et l'asymptote d'une fonction logarithmique est toujours $x = 0$. Ce n'est pas vrai, mais les étudiants le croient systématiquement, car ce sont pas mal les seules qui ont été vues au niveau des 4^{e} et 5^{e} secondaire.
- Selon les étudiants, il n'existe que des asymptotes horizontales ou verticales, rien d'autre. Alors, ils sont un peu surpris lorsqu'ils font face à des asymptotes obliques ou curvilignes au cours de calcul différentiel, comme les étudiants lors de l'expérience que nous présenterons au chapitre 3.
- La notion d'infini mathématique embête les étudiants avec les fonctions ayant ce type de comportement asymptotique, encore là, à cause de leur interprétation de ce que représente l'infini et de la question sur si ce dernier est un nombre réel. Ils pourraient alors manipuler l'infini sous forme d'infini potentiel afin d'avoir une meilleure vision de l'asymptote comme un processus continu.

1.5 L'INFINI MATHÉMATIQUE COMME PROBLÈME DE FOND POUR L'APPRENTISSAGE DE LA LIMITE

Il y a deux types d'infini qui sont mis en branle dans le processus d'apprentissage des limites au niveau collégial : l'infini potentiel (datant des Grecs, au 5^{e} siècle avant J.-C., historiquement très riche et porteur de sens, très relié à l'intuition) et l'infini actuel (tel que décrit vers la fin du 19e siècle et ayant nécessité de nombreux siècles de travaux et de discussions afin d'arriver à un concept non contradictoire). Le passage de l'infini potentiel à l'infini actuel ou réel est quelque chose de difficile et cela amène un obstacle épistémologique chez les étudiants (Brousseau, 1987). Il serait normal de voir un obstacle mathématique et épistémologique qui a pris de nombreuses décennies à se régler pointer le bout du nez dans notre classe de calcul différentiel (Dufour, 2011). Un obstacle épistémologique qui a été vécu par le passé dans l'élaboration et l'amélioration des mathématiques peut certainement être vécu au même moment, sous la même séquence historique (accélérée), dans l'apprentissage des mathématiques.

Tentons de revoir, historiquement parlant, les deux points de vue sur l'infini. Si nous prenons l'idée qu'avait Aristote d'un processus infini, on peut affirmer que ce dernier percevait souvent une action à appliquer (addition ou division répétée, processus de convergence ou de divergence de séries) pour s'approcher d'un nombre infiniment grand, mais que, malgré tout, ce nombre infiniment grand est fini mathématiquement parlant. Par contre, il n'y a pas d'existence de ce nombre physiquement parlant. (Delahaye, 2017). En fait, l'idée exprimée par Aristote est souvent reprise en Calcul 2, que ce soit avec les limites vers l'infini, les suites, les séries ou l'intégrale vue comme étant une somme de rectangles ou de trapèzes avec une hauteur infinitésimale.

> *Leibniz [,quant à lui,] défend plutôt un infini philosophique, celui du monde physique pris comme un tout. L'infiniment petit […] ne saura vraiment trouver une place confortable et assurée en mathématiques qu'en se débarrassant de son objectualité, c'est-à-dire quand on ne parlera plus des infiniment petits [ou des infimiment grands] comme d'objets mathématiques, mais comme de limites. ((Delahaye, 2017) en page 3)*

L'infini actuel est vu comme quelque chose de fixe. Tout est là, rien ne bouge. Si l'on analyse la convergence, soit de suites ou de fonctions, l'on regarde avec précision avec les voisinages d'un côté (domaine ou delta) et l'existence d'un autre voisinage (image ou epsilon). Tel quel, on peut imaginer une fenêtre dans laquelle on cadre la fonction autour d'un nombre infiniment grand tel que, si la valeur des abscisses est suffisament grande, on verra que les ordonnées sont proches d'une valeur assez constante. Si la tendance se maintient, on aura face à nous la limite à l'infini actuel. Il faut faire attention ici, car, dans le langage commun de tous les jours, nous utilisons en tout temps l'infini potentiel. C'est alors difficile de définir l'infini actuel sans passer par une idée près de l'infini potentiel. D'ailleurs, la difficulté est ainsi exprimée dans le questionnaire (de recherche) par le fait que l'on approche la notion de limite à l'infini d'une fonction rationnelle polynomiale par l'idée intuitive qu'ont les étudiants de l'infini, c'est-à-dire un infini potentiel, que ce soit en explorant le domaine de la fonction dans des valeurs de plus en plus grandes pour avoir une idée de la tendance vers l'infini positif ou de plus en plus petites pour avoir une idée de la tendance vers l'infini négatif. En utilisant le calculateur symbolique, on permet aux étudiants d'avoir une idée plus juste de l'infini actuel. La plus grande difficulté qui sera vue dans le questionnaire de cette recherche est plutôt vue quand la fonction polynomiale rationnelle est constituée d'un numérateur avec un degré supérieur à celui du dénominateur. Dans ce cas, les étudiants obtiendraient une expression semblable à celle-ci :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 2}{x - 3} = \infty$$

De nombreuses erreurs conceptuelles peuvent ressortir de l'expression précédente. D'abord, l'infini n'est pas un nombre réel, ni même un complexe. Or, une limite ne peut pas égaler à l'infini, ni même l'infini négatif. On devrait expliquer en mots que la limite diverge vers l'infini positif ou négatif, sans plus ni moins. Donc, il y a aussi les erreurs de simplification qui seront possibles, car certains étudiants vont tenter de biffer une occurrence de x au numérateur et au dénominateur, alors que ce serait totalement loufoque et non-mathématique comme simplification. Alors, d'autres étudiants vont tenter d'effectuer la division à crochets pour simplifier l'expression et le résultat serait la réponse de cette limite selon eux. Or, ils auraient tort, car il s’agirait de l’équation de l’asymptote curviligne qui ressortirait ainsi qu’un reste tendant vers 0. Quelques étudiants pourraient confondre l’idée des deux symboles ∞ dans l’expression de cette limite, car ils éprouvent déjà des difficultés à cerner les valeurs réservées aux abscisses et aux ordonnées dans l’expression d’une limite d’une fonction. Pourquoi en est-il ainsi? L’enseignement du calcul différentiel et les manuels scolaires servant de base pour certains des cours de calcul exploitent rarement la notion d’infini et préfèrent utiliser des règles déjà prêtes à l’emploi pour que les étudiants deviennent plutôt des techniciens et applicateurs de règles que des chercheurs en mathématiques afin de comprendre l’idée même des concepts vus en calcul différentiel, dont ceux d’infini, de limite à l’infini, d’asymptote et de divergence d’une fonction. (Grenier-Boley, N. et S. Bridoux, M. De Vleeschouwer, V. Durand-Guerrier, etc., 2015)

1.6 PROBLÈMES D’APPRENTISSAGE SUR LA NOTION DE « LIMITE »

Le concept de limite est compliqué et on le sait depuis longtemps.

> « La définition de limite en termes de ε et δ est le résultat de plus de cent ans d’essais et d’erreurs et il incorpore en quelques mots le résultat d’un effort persistant pour donner à ce concept une base solide mathématique… Cependant, une compréhension claire et une définition précise des limites ont été bloquées pendant une longue période par une difficulté apparemment insurmontable. » ((Courant et Robbins, 2002) en page 1))

Elle date, en fait, du 20^{e} siècle afin d’être le plus précis possible dans la définition de la limite.

L’une des difficultés est reliée à l’utilisation de la notation qu’il faut pouvoir comprendre, saisir pour comprendre le concept de limite. Comme étudiant, en 2002, lorsqu’on m’a montré la notion de limite à ma première session au niveau collégial, j’ai pris peur avec les ε et les δ. Je n’y comprenais rien. Lorsque j’ai compris qu’il s’agissait en fait de l’élaboration d’une fenêtre infinitésimalement près de la fonction en un certain abscisse où δ était une marge d’erreur avant et après cet abscisse et ε, une marge d’erreur du côté des ordonnées, j’ai alors saisi que l’on parlait de voisinage autour de l’abscisse étudiée de cette fonction.

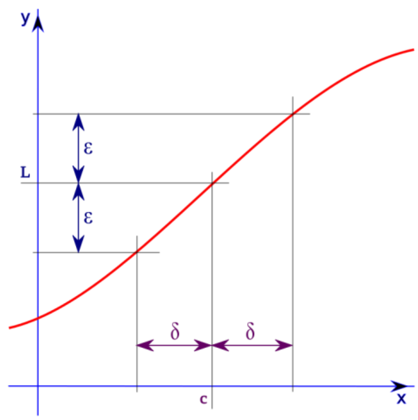


Figure 1.16: Schéma explicatif de la limite en termes de epsilon et delta (Wikipedia, 2016)

Selon Dufour (2011),

> *… lorsque l'on parle de la limite, il va de soi de parler d'un processus qui fait qu'étant donné un voisinage autour de L, on peut trouver un voisinage autour de [c], tel que toutes les images des valeurs à l'intérieur de ce dernier voisinage, en excluant la valeur [c], vont « tomber » dans le voisinage choisi de départ. (Dufour, 2011, page 29)*

En enseignement du calcul différentiel au niveau collégial, de nos jours, tout en utilisant une définition correcte mathématiquement, on esquive la notation en termes de ε et de δ. Nous restons plutôt avec, en tête, une idée implicite et intuitive par rapport au voisinage (« dans les alentours de … ») autour d’un point de la fonction. C’est ainsi qu’on évite de parler de limite en utilisant une notation trop lourde pour certains étudiants qui présentent des difficultés. Cette affirmation s’avère assez juste et confirmée à travers différentes discussions auprès de confrères et consoeurs enseignant-e-s lors de congrès (AQPC par exemple), de colloques (AMQ par exemple) ou même de collègues proches (soit au Collège LaSalle ou dans d’autres institutions). De plus, l'idée générale d'avoir un cours de calcul différentiel au niveau collégial n'est-il pas de rendre fonctionnels les étudiants quant à l'application de formules de dérivées tout en comprenant les idées sous-jacentes derrière ces calculs telles que l'optimisation ou le traçage de graphiques sans aide technologique? Pourquoi alors insister pour présenter aux étudiants du collégial cette définition de limite explicite et analytique alors qu'on peut comprendre tout ça sans utiliser de formalisme compliqué qui a pris justement plus de cent ans à être bâti? Allons maintenant voir comment le sujet des limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales est abordé dans certains manuels scolaires au Québec. On s'y intéresse, car c'est un type de fonctions vues en calcul différentiel en sciences humaines qui amène l'étude d'asymptotes lors du traçage de graphique. Vu que limites, asymptotes et traçage de graphique font partie d'une évolution des apprentissages en calcul différentiel, je trouvais cela intéressant d'avoir ce type d'enchaînement lors d'une activité pédagogique.

Depuis le début de ma carrière d'enseignant de mathématiques (en 2012), je me pose souvent la question suivante, vu mon utilisation constante de GeoGebra en salle de classe : « Une utilisation encadrée du logiciel GeoGebra, dans le cadre d'un cours de calcul différentiel, peut-elle aider les étudiants à auto-construire certains concepts afférents autour des limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales? »

Des sous-questions peuvent être élaborées par rapport à ma question de base.

- L'utilisation libre du logiciel GeoGebra peut-elle favoriser la visualisation mathématique chez des étudiants?
- La tendance socioculturelle de l'activité encadrée peut-elle favoriser la collégialité, la collaboration entre les étudiants en absence d'aide théorique de l'enseignant? Est-ce que cela peut favoriser les apprentissages en classe de mathématiques?

- Est-ce que l’utilisation libre du logiciel GeoGebra, axée sur la visualisation mathématique, favorise le passage d’un mode de représentation mathématique à un autre de la part de l’étudiant?

CHAPITRE II – ANALYSE DE MANUELS

2.1 INTRODUCTION

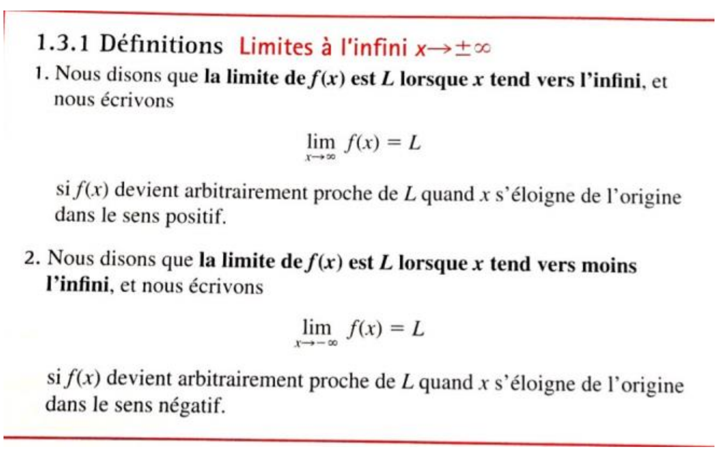
Dans le cadre de ce chapitre, nous allons étudier les concepts mathématiques présentés dans la problématique à travers une analyse de 4 manuels scolaires choisis parmi les plus utilisés en salle de classe de calcul différentiel au Québec. Nous souhaitons voir comment ces concepts sont approchés par différents auteurs. De plus, il faudra comprendre en quoi l'apport réfléchi de l'informatique est important et utile en salle de classe, en utilisant le logiciel de façon à se questionner sur notre savoir mathématique et à le modifier conséquemment. En fait, on cherchera à déterminer pour quelles raisons il est intéressant d'explorer notre problématique avec GeoGebra, un logiciel de géométrie dynamique. Nous présenterons finalement la méthodologie qui a été utilisée lors de l'expérimentation ainsi que les traces des étudiants qui ont permis de mener l'analyse. Nous répondrons ainsi à l'objectif et aux questions présentées à la fin de la problématique.

2.2 LES MANUELS SCOLAIRES ET LEUR APPROCHE AU CONCEPT DE LIMITE

Dans cette section, nous allons étudier le manuel utilisé dans le collège où a été menée l'expérimentation, celui de Thomas, Finney, Weir et Giordano (2001), ainsi que les 3 manuels les plus utilisés à l'heure actuelle dans le cadre des cours de calcul différentiel selon Tcheuffa (2015) soient les manuels de Brunelles et Désautels (2016), de Charron et Parent (1995) et de Hamel et Amyotte (2007).

2.2.1 THOMAS, FINNEY, WEIR ET GIORDANO, 10^E EDITION (2001)

Tout d'abord, étudions le manuel de Thomas, Finney, Weir et Giordano, 10^e édition. Le bloc de pages de 109 à 121 est sujet à étude dans le cadre de notre recherche. Un point fort du manuel réside en un apparté effectué dès le début de cette section (1.3) dans le manuel. On indique au lecteur la nature de l'infini (∞) : « [il] ne représente jamais un nombre réel, et nous ne pouvons pas l'utiliser de la même façon qu'une valeur quelconque » ((Thomas, Finney, Weir, Giordano, 2001) à la page 109). On évoque la limite à l'infini d'une fonction définie de façon intuitive en faisant toutefois référence à l'idée de l'infini potentiel, en utilisant les expressions « arbitrairement proche de L » et « s'éloigne de l'origine », pour s'approcher de l'idée de l'infini réel (actuel). Constatez-le en regardant la figure 2.1 qui est une capture de la page 109 du manuel.



1.3.1 Définitions Limites à l'infini $x \to \pm\infty$

1. Nous disons que **la limite de $f(x)$ est L lorsque x tend vers l'infini**, et nous écrivons

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L quand x s'éloigne de l'origine dans le sens positif.

2. Nous disons que **la limite de $f(x)$ est L lorsque x tend vers moins l'infini**, et nous écrivons

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L quand x s'éloigne de l'origine dans le sens négatif.

Figure 2.1: Définitions de la limite à l'infini d'une fonction (Thomas, Finney, Weir, Giordano, 2001) en page 109

En page 109, on donne déjà dans la visualisation mathématique[8] pour tenter une approche des limites à l'infini de fonction: la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$, fonction déjà connue du secondaire. On a le graphique de la fonction rationnelle pour en visualiser la limite à l'infini, car, comme on dit, une image vaut mille mots. De plus,

[8] La visualisation mathématique est une idée englobant le fait de former des images mentales, avec papier et crayon ou avec l'aide d'un outil informatique et utiliser ces images dans un but de découverte et de compréhension mathématiques. (Zimmermann, W & Cunningham, S, 1991) Il est à noter que la pensée mathématique sous une forme visuelle tend à exploiter des compétences de plus haut niveau que lorsque nous utilisons des algorithmes déjà tout crus dans le bec afin de résoudre des problèmes. Pour cette raison, de nombreux étudiants et enseignants vont rester avec des explications sommaires passant par des algorithmes de résolution, car cela est plus évident et facile (Eisenberg, T. et T. Dreyfus, 1991).

on tente de faire comprendre que la limite à l'infini d'une fonction constante (de pente nulle) est cette valeur constante justement en ayant implicitement l'idée du graphique en tête.

Solution

a) La figure 1.3.1 à la page 109 montre que $y = 1/x$ s'approche progressivement de 0 à mesure que x s'éloigne de l'origine dans le sens positif ou négatif.

b) Quelle que soit la distance entre x et l'origine, la fonction constante $y = k$ a toujours exactement la valeur k.

Figure 2.1: Capture de la page 110 (Thomas, Finney, Weir, Giordano, 2001)

En page 110 du manuel, il y a élaboration sous forme de *théorème* des propriétés des limites à l'infini.

1.3.2 Théorème Propriétés des limites à l'infini

Soit L, M et k, trois nombres réels. Si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{alors}$$

1. *limite d'une somme* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M;$
2. *limite d'une différence* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M;$
3. *limite d'un produit* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M;$
4. *limite d'un multiple de fonction* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L;$
5. *limite d'un quotient* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0;$
6. *limite d'une puissance* si r et s sont des entiers, $s \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

pourvu que $L^{r/s}$ soit un nombre réel.

Figure 2.2: Propriétés des limites à l'infini (Thomas, Finney, Weir, Giordano, 2001)

On comprendra qu'il y a ici un aspect intéressant, mais prescriptif, autour de lois à appliquer, d'algorithmes de résolution, pour les limites à l'infini de fonctions sans toutefois passer à une exploration du concept de l'infini. Toujours dans ce manuel, on montre qu'il y a trois cas de figure à l'étude dans le cadre de notre problématique : avec une fonction polynomiale rationnelle, le degré du numérateur peut être soit inférieur à celui du dénominateur, soit égal, soit supérieur. En une page, on montre les trois cas, sans trop d'explications théoriques ou de tentatives de généralisations à d’autres exemples. Un manuel scolaire qui montre de la théorie par l’exemple sans trop d’explications sur les limites à l’infini est un peu comme un enseignant qui n’explique rien et qui indique à ses étudiants : « Croyez-moi, je détiens la vérité absolue. » La page 111 du manuel de Thomas, Finney, Weir et Giordano (voir appendice A) est assez peu explicite et limitative. C’est ce constat qui a été le point de départ de la problématique de recherche qui porte sur la limite à l’infini de fonctions rationnelles polynomiales. Par contre, deux points positifs sont à ressortir de cette page :

- La visualisation mathématique est de mise et aide à comprendre les propos (au moins en partie) en regardant les différents graphiques présentés. Cela va chercher une compréhension plus forte de la matière (Eisenberg, T. et T. Dreyfus, 1991);
- Les explications mathématiques nécessaires sont présentées en plus petits caractères pour la simplification ou l’application de règles autour des limites, ce qui permet aux étudiants de suivre le processus mathématique sans s’enfarger dans les calculs et les explications supplémentaires d’étapes intermédiaires.

Toutefois, des questions peuvent persister chez l’étudiant :

- Pourquoi doit-on diviser tous les termes de l’expression rationnelle polynomiale par la variable affectée du plus haut degré du dénominateur?
- Pourquoi doit-on vérifier à plus et à moins l’infini cette même limite?
- Est-ce que le manuel est erroné en traçant des asymptotes autres qu’horizontale ou verticale?
- N’y a-t-il que trois cas de figure pour les limites à l’infini de fonctions rationnelles polynomiales?

Donc, le manuel de Thomas, Finney, Weir et Giordano est quelque peu prescriptif et fonctionne par objectifs et par exemples. En ce qui a trait aux limites à l'infini, il se limite pas mal en un temps aux fonctions polynomiales rationnelles et n'y ajoute pas des termes autres qu'algébriques. Dans les points forts, il y a la forte présence de la visualisation mathématique qui pourrait être vue comme une béquille par certains mathématiciens ou très aidante par d'autres. Les détails et les justifications des calculs sont aidants, mais pas assez détaillés pour que l'étudiant puisse comprendre facilement.

Selon Tcheuffa (2015), « les livres les plus utilisés sont, Josée Hamel et Luc Amyotte, *Calcul différentiel*, ERPI, 2007; Gilles Charron et Pierre Parent, *Calcul différentiel*, Éditions Études Vivantes ou Beauchemin, ainsi que Éric Brunelle et Marc-André Désautels, *Calcul différentiel*, édition CEC, 2011 [maintenant, 2e édition, en 2016]. » Nous étudierons donc dans ces trois manuels scolaires leur vision des limites à l'infini de fonctions.

Il est vrai que les enseignants novices de mathématiques au collégial utilisent généralement des manuels « plus prescriptifs et plus formels » (Tcheuffa, 2015) pour faciliter leur préparation de cours et leurs interventions en et hors classe. Par contre, des enseignants avec quelques années d'expérience tendent généralement vers un autre choix : un manuel avec « une approche plus intuitive permet[tant] à l'étudiant de développer plus rapidement une pensée intuitive, une plus grande compréhension du calcul différentiel et de la dérivée et plus tard une conception plus formelle sur ces notions » (Tcheuffa, 2015 en page 20) . C'est notre cas au Collège LaSalle, car je crois qu'il est important pour les étudiants de stimuler leur intuition mathématique afin de développer les concepts de calcul différentiel et ne pas trop présenter de concepts mathématiques abstraits sans favoriser la visualisation mathématique de ceux-ci. La visualisation mathématique est plus que nécessaire pour aider les étudiants avec des troubles d'apprentissage ou tout simplement faibles en mathématiques. Par le passé, dans les cours de Calcul 1 et 2, comme enseignant, les expérimentations que j'ai faites avec l'utilisation de l'informatique ou à caractère kinésique furent très payantes avec cette population étudiante. Certains étudiants faibles ont pris confiance en leurs compétences en mathématiques grâce à celles-ci et ont été jusqu'à passer fièrement le cours. D'autres m'ont expliqué qu'ils ont remarqué une meilleure compréhension de la matière suite à certains laboratoires en classe.

2.2.2 BRUNELLE ET DÉSAUTELS, 2E ÉDITION (2016)

Nous continuerons donc avec l'analyse du manuel de Brunelle et Désautels, 2e édition. Je connais ce manuel car j'ai été amené à y intégrer un apport technologique dans certains des chapitres. J'ai également ajouté une quinzaine de laboratoires informatiques sur GeoGebra tout au long des chapitres. La section 2.4 du manuel, entre les pages 75 et 82, exploite le sujet des limites à l'infini de fonctions. Les auteurs ont décidé de débuter la section de la même façon que chez Thomas, Finney, Weir et Giordano en élaborant autour de la nature de l'infini (voir la figure 2.4). Brunelle et Désautels ont le problème similaire que celui soulevé dans Thomas, Finnez, Weir et Giordano autour de l'idée de l'infini potentiel et non de l'infini actuel, mais cet apparté s'avère nécessaire pour la suite de l'apprentissage en cours.

2.4.1 Les limites à l'infini ($x \to \pm\infty$)

Rappelons d'abord que l'infini (∞) n'est pas un nombre réel. Lorsque nous écrivons $x \to \pm\infty$, nous utilisons le symbole de l'infini pour signifier que nous nous intéressons au comportement d'une fonction dans les cas où x peut être aussi grand ($x \to \infty$) ou aussi petit ($x \to {}^{-}\infty$) que l'on veut.

Figure 2.3: La nature de l'infini (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 75

Lorsque Brunelle et Désautels tentent de définir une limite à l'infini d'une fonction, ils utilisent la même notation, mais l'explication autour de celle-ci est beaucoup plus explicite et tend à favoriser la visualisation mathématique chez le lecteur (voir la figure 2.5).

DÉFINITION 4

Limite à l'infini

- Nous dirons que $L \in \mathbb{R}$ est la **limite d'une fonction $f(x)$ dans le cas où x tend vers l'infini,** si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus près de L lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes, que nous noterons:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

- Nous dirons que $L \in \mathbb{R}$ est la **limite d'une fonction $f(x)$ dans le cas où x tend vers moins l'infini,** si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus près de L lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus petites, que nous noterons:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Figure 2.4: Définition de limite à l'infini d'une fonction (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 75

Le doute peut s'installer chez le lecteur si ce dernier pense à une fonction typique qui pourrait diverger (vers l'infini positif ou négatif), mais les auteurs ont pensé à cette idée déjà en écrivant l'apparté suivant dans une rubrique nommée « Intuitivement ». Un point désolant est de ne pas encore voir les trois cas de limites à l'infini de fonctions rationnelles: l'une allant vers 0, l'une vers une constante et la dernière tendant vers l'infini, mais les auteurs précisent qu'une fonction peut tendre vers une valeur constante (0 ou autre) ou peut diverger quand la variable devient de plus en plus grande.

INTUITIVEMENT…

Le calcul de la limite dans le cas où $x \to \infty$ nous indique si la fonction s'approche d'un nombre L ou si elle continue d'augmenter ou de diminuer indéfiniment lorsque x devient très grand. Il en va de même dans le cas où $x \to {}^{-}\infty$.

Figure 2.5: Apparté sur le calcul de la limite à l'infini (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 75

Comme quoi l'infini est vu comme une finalité (infini actuel), que ce soit du côté négatif ou positif, les auteurs ont cru bon de ressortir l'idée qu'on ne pourra pas calculer une limite par la droite lorsque x approche de $+\infty$, ni calculer une limite par la gauche lorsque x approche de $-\infty$ (voir la figure 2.6). Par contre, ici, les auteurs, en utilisant ce langage, amènent une erreur conceptuelle dont on souhaite se débarrasser chez les étudiants, une espèce de contradiction avec ce qu'ils ont énoncé plus tôt. Si l'infini n'est pas un nombre réel, on ne devrait pas pouvoir s'en approcher. On devrait plutôt opter pour une formulation autre telle que, pour une valeur de x de plus en plus grande, on approche de telle valeur constante pour une limite vers l'infini positif. Dans le même sens, on devrait opter pour une formulation telle que, pour une valeur de x de plus en plus petite, on approche de telle autre valeur constante pour une limite vers l'infini négatif. Il est à noter que l'infini ne peut pas être atteint comme valeur.

REMARQUE

Il est important de comprendre que lorsque nous calculons des limites à l'infini, nous ne pouvons plus parler de limites à gauche ou à droite. En effet, lorsque $x \to \infty$, nous pouvons nous approcher de ∞ par la gauche, mais **jamais** par la droite. De même, lorsque $x \to -\infty$, nous pouvons nous approcher de $-\infty$ par la droite, mais **jamais** par la gauche. Nous n'utiliserons donc jamais la notation $x \to \pm\infty^{\pm}$.

Figure 2.6: Calcul d'une limite à l'infini (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 75

La courbe de la loi normale, étant relativement bien connue des étudiants de sciences humaines au collégial, à cause de leur cours de Méthodologie Quantitative, est utilisée comme premier exemple pour favoriser la visualisation du concept précédent.

EXEMPLE 2.16

Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Calculez les limites suivantes.

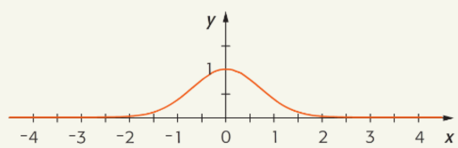
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

SOLUTION

Puisque nous ne savons pas encore comment calculer ces limites algébriquement, nous utiliserons la méthode graphique (voir la figure 2.10).

FIGURE 2.10



a) Nous voulons calculer $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2}$. Nous pouvons voir que la hauteur de la courbe diminue de plus en plus vers la gauche et semble s'approcher de 0. Donc, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$.

b) Nous voulons calculer $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2}$. Nous pouvons voir que la hauteur de la courbe diminue de plus en plus vers la droite et semble s'approcher de 0. Donc, $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$.

Figure 2.7: 1ier exemple de limite à l'infini de fonction (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 75

On remarque déjà en page 75 un premier laboratoire informatique instauré par moi-même sur le comportement asymptotique. Ce laboratoire se trouve à l'appendice B. Ce laboratoire authentique a été créé pour mettre les étudiants rapidement en contact avec une situation qui n'est pas située dans le domaine continu, mais bien dans un domaine discret (ponctuel). On fait manipuler du matériel (papier et ciseaux) ainsi qu'un logiciel informatique (GeoGebra). Cela aide beaucoup les étudiants qui sont kinésiques[9]. Ce laboratoire permet aux étudiants de tracer un nuage de points dans GeoGebra, d'élaborer une courbe de tendance logistique[10], d'effectuer de l'extrapolation en utilisant la courbe de tendance et les limites en faisant comme si

[9] Qui apprennent en manipulant, en expérimentant. Ils ne sont généralement ni visuels, ni auditifs dans le cadre de leurs apprentissages.

[10] Alors qu'ils n'ont généralement vu que la droite de régression linéaire dans le cadre du cours de Méthodologie Quantitative en Sciences Humaines. J'élabore parfois sur les autres types de régression avec utilisation de logiciels informatiques (Excel, GeoGebra) dans le même cours et les étudiants semblent comprendre le topo général.

nous nous situions en mode continu. Les étudiants apprécient généralement le fait qu'ils puissent ajouter des données et obtenir alors une meilleure précision dans la tendance. Le laboratoire est tellement facile à suivre que les étudiants arrivent à le comprendre sans aide. Ils sont également capables de verbaliser le tout : « Rien qu'à voir, on voit bien que l'on va obtenir la feuille en entier en continuant ce processus de façon infini! »[11] Il pourrait aussi se situer dans un cours de calcul 2 pour illustrer les séries géométriques (en mode discret).

Les principales règles de l'algèbre de l'infini

Règle	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	Opération	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	Résultat obtenu en remplaçant x par a	Résultat
1	∞	$+$	∞	$\infty + \infty$	$= \infty$
2	$-\infty$	$+$	$-\infty$	$-\infty - \infty$	$= -\infty$
3	∞	$+$	$-\infty$	$\infty - \infty$	Forme indéterminée
4	$K \in \mathbb{R}$	$+$	$\pm\infty$	$K \pm \infty$	$= \pm\infty$
5	$K \in \mathbb{R}^+$	$\cdot$	$\pm\infty$	$K \cdot \pm\infty$	$= \pm\infty$
6	$K \in \mathbb{R}^-$	$\cdot$	$\pm\infty$	$K \cdot \pm\infty$	$= \mp\infty$
7	$K \in \mathbb{R}$	$\div$	$\pm\infty$	$K \div \pm\infty$	$= 0$
8	$\pm\infty$	$\cdot$	$\pm\infty$	$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$= \pm\infty$
9	0	$\cdot$	$\pm\infty$	$0 \cdot \pm\infty$	Forme indéterminée
10	$\pm\infty$	$\div$	$\pm\infty$	$\pm\infty \div \pm\infty$	Forme indéterminée
11	0	$\div$	0	$0 \div 0$	Forme indéterminée
12	$K \in \mathbb{R}^+$	$\div$	0^+	$K \div 0^+$	$= \infty$
13	$K \in \mathbb{R}^+$	$\div$	0^-	$K \div 0^-$	$= -\infty$
14	$K \in \mathbb{R}^-$	$\div$	0^+	$K \div 0^+$	$= -\infty$
15	$K \in \mathbb{R}^-$	$\div$	0^-	$K \div 0^-$	$= \infty$
16	$K > 1$	$\wedge$	∞	K^∞	$= \infty$
17	$0 < K < 1$	$\wedge$	∞	K^∞	$= 0$

Note : Le symbole $\wedge$ signifie « exposant » : $A \wedge B = A^B$.

Figure 2.8: Tableau 2.3 des règles des limites à l'infini (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 76

La figure ci-haut (figure 2.9), située en page 76 du manuel, nous donne un tableau de 17 règles de l'algèbre de limites à l'infini. Ce tableau peut être très aidant avec des étudiants plus faibles en mathématiques, car ils y feront référence pour résoudre des limites à l'infini, mais il peut être barbant si l'on ne veut pas que les étudiants

[11] Propos généralement recueillis dans ma salle de classe.

apprennent par cœur les règles (c'est quasiment prescriptif dans certains manuels) et comprennent plutôt ce pan de la matière. Faire penser à l'infini potentiel, un très gros nombre, aide certains étudiants à comprendre par eux-mêmes ces règles un peu indigestes. Par exemple, si on veut séparer 5 tartes en 250 parts, les parts seront d'une certaine grosseur déjà très petite. Si on veut desservir 2500 personnes, les parts seront alors encore plus petite. Ainsi, les étudiants pourraient comprendre que diviser un nombre réel par l'infini tendra vers 0. Comme autre exemple, pour comprendre la notation de 0^- et de 0^+, on peut dire que 0^- est un nombre légèrement (infiniment petit) à gauche (ou en-dessous) de 0, donc un petit nombre négatif. Le 0^+ sera un nombre légèrement (infiniment petit) supérieur à 0, mais très près de celui-ci. Ainsi, les étudiants pourront utiliser leur calculatrice pour voir la tendance générale d'une expression comportant 0^- ou 0^+. Cette idée intuitive produira-t-elle un obstacle ? Selon ma pratique enseignante, à court terme, cela ralentit un peu le processus, mais c'est gagnant à long terme, car j'ai réussi à amener un processus de réflexion mentale de substitution parlant aux yeux des étudiants.

Il est indiqué que 4 de ces règles forment une indétermination et on nous indiquera plus loin comment s'en débarasser. En appliquant ces règles, on n'incite pas les étudiants et les enseignants à viser dans les compétences les plus élevées. Appliquer des algorithmes n'a rien de très palpitant et ne demande pas beaucoup de compréhension des concepts mathématiques en vigueur à ce moment-ci (Eisenberg, T. et T. Dreyfus, 1991).

En contre-partie, les auteurs de ce manuel ont été portés à utiliser de nombreux exemples pour illustrer ces lois au lecteur afin d'en faciliter leur utilisation. Par exemple, l'exemple 2.17 illustre une fonction exponentielle de base ½ et on en cherche la limite quand x tend vers l'infini positif. La rubrique « Intuitivement », située en marge, aide le lecteur à comprendre le processus ou même la règle en tant que tel.

EXEMPLE 2.17

Déterminez $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

SOLUTION

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty$$

Nous avons une forme K^∞ avec $0 < K < 1$ (règle 17).

D'où $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

Les limites à l'infini ont les mêmes propriétés que les limites finies, c'est-à-dire que nous pouvons faire appel au théorème 2.2. Nous pourrons donc remplacer la variable par $\pm\infty$ dans la fonction pour trouver la limite.

INTUITIVEMENT…

Voyons ce qui se produit lorsque nous multiplions $\frac{1}{2}$ une infinité de fois : $\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots$
Nous pouvons voir que le résultat est de plus en plus près de zéro à mesure que l'exposant augmente.

Figure 2.9: Exemple 2.17 en page 77 (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 77

Brunelle et Désautels ont même décidé de revenir sur le 1ier exemple de limites à l'infini qu'ils ont utilisé précédemment afin d'utiliser les règles et de montrer que ce qui était vrai avec aide du graphique est tout aussi vrai avec les règles algébriques de l'infini. Remarquez en rouge la justification de chacune des étapes.[12] Cela aide les étudiants à visualiser chacune des étapes et des lois utilisées. Encore ici, la rubrique « Intuitivement » permet au lecteur de visualiser les règles de l'algèbre à l'infini.

[12] Sur la version virtuelle (électronique), il y a généralement des liens cliquables sur ces justifications qui nous ramènent directement aux lois ou aux explications de celles-ci.

EXEMPLE 2.18

Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ étudiée par la méthode graphique dans l'exemple 2.16. Calculez les limites suivantes à l'aide de l'algèbre de l'infini.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

SOLUTION

Utilisons les règles de l'algèbre de l'infini du tableau 2.3 pour évaluer ces limites.

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} &= e^{-(-\infty)^2} && \text{(par substitution dans l'équation)}\\ &= e^{-\infty} && \text{(nombre négatif au carré)}\\ &= \frac{1}{e^{\infty}} && \text{(propriété 6 de la loi des exposants)}\\ &= \frac{1}{\infty} && \text{(règle 16)}\\ &= 0 && \text{(règle 7)}\end{aligned}$$

INTUITIVEMENT…

La règle 16 : un nombre supérieur à 1 exposant un très grand nombre sera lui aussi très grand.

La règle 7 : un nombre divisé par un très grand nombre s'approche de 0.

INTUITIVEMENT…

Dans le calcul des limites à l'infini, il est souvent utile de transformer les exposants négatifs en exposants positifs.

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} &= e^{-(\infty)^2} && \text{(par substitution dans l'équation)}\\ &= e^{-\infty} && \\ &= \frac{1}{e^{\infty}} && \text{(propriété 6 de la loi des exposants)}\\ &= \frac{1}{\infty} && \text{(règle 16)}\\ &= 0 && \text{(règle 7)}\end{aligned}$$

Figure 2.10: Retour sur le 1ier exemple de limite à l'infini (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 77

Tel que vu aux figures 2.10 et 2.11, on aperçoit un obstacle que les didacticiens veulent faire surmonter aux étudiants et ce dernier est proposé comme *technique* de calcul de limites pour faire référence aisément au tableau des règles de l'algèbre de l'infini (figure 2.9). Il faudrait, selon nous, Dufour (2011) et Hitt (2013), éviter la substitution *formelle* et effectuer un calcul mental, la substitution dans notre tête, afin de savoir si nous tombons dans un type d'indétermination et ainsi réfléchir sur la stratégie à suivre. Promouvoir la substitution explicite est vue comme étant contradictoire à l'affirmation que l'infini n'existe pas. Par contre, on arrive face à la même difficulté que lorsque nous avons à définir les infinis potentiel et actuel. L'un se définit aisément, alors que l'autre est impossible à définir de façon correcte sans passer par le langage de l'infini potentiel. Alors, comme enseignants, nous demandons généralement d'écrire tel quel cette contradiction, car rien ne nous donne accès au processus mental qui s'effectuerait dans la tête de l'étudiant lors d'un calcul de limite erroné. Je demande d'écrire ce processus en retrait du calcul principal, car ce n'est pas mathématiquement juste de substituer la variable par l'infini alors que ce n'est pas un nombre réel. Par contre, si nous voulons faire référence au tableau de l'algèbre de l'infini (Figure 2.9), nous devons avoir une petite idée de la forme que la limite prendra. Ce sont alors les deux raisons pour lesquelles les enseignants acceptent sans trop de questionnements de faire une substitution explicite alors que les didacticiens la proscrivent.

Aux pages 78 et 79, les auteurs nous défient en nous offrant une situation de la vie courante pour évaluer les limites à l'infini dans un contexte authentique : la résistance de l'air versus la vitesse de chute d'un parachutiste. La rubrique « Intuitivement » nous permet encore une fois de saisir le propos de l'exemple présenté. Sérieusement, pour des novices en matière de saut en parachute et en physique, si nous offrons cette situation à des étudiants de sciences humaines, il vaut mieux mâcher nos explications et les rendre intelligibles, ce qui est vraiment le cas ici de l'apparté contrairement à l'énoncé du problème de l'exemple 2.19. Ce problème, sans l'apparté, pourrait être difficilement compréhensible par des gens sans bagage scientifique ou en physique.

INTUITIVEMENT...

Il y aura bel et bien une vitesse limite, car plus la vitesse de la parachutiste augmente, plus la résistance augmente. Lorsque ces deux forces s'équilibrent, la vitesse limite est atteinte. De plus, cette vitesse est atteinte à long terme, car au moment où la parachutiste amorce sa chute, sa vitesse est nulle et augmente ensuite jusqu'à un maximum. Nous nous intéressons donc à la valeur de la vitesse lorsque t devient de plus en plus grand, c'est-à-dire lorsque $t \to \infty$.

EXEMPLE 2.19

Une parachutiste saute d'un avion, et prend la position horizontale, qui maximise la résistance de l'air. Supposons que cette résistance est proportionnelle à la vitesse de la parachutiste, c'est-à-dire que plus celle-ci tombe rapidement, plus la résistance de l'air augmente. La vitesse de la parachutiste en fonction du temps est donnée par :

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

où m est la masse de la parachutiste, $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et k est une constante représentant l'effet de la résistance de l'air sur la parachutiste.

a) Déterminez la vitesse initiale de la parachutiste.

b) Déterminez la vitesse maximale que peut atteindre la parachutiste, c'est-à-dire sa vitesse à long terme.

c) Les parachutistes doivent ouvrir leur parachute avant d'arriver à une altitude de 850 m. Si la masse de la parachutiste est de 55 kg, que $k = 8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et que l'altitude de 850 m est atteinte en 53 s, quelle est la vitesse de la parachutiste à ce moment ? Comment ce résultat se compare-t-il à la vitesse maximale que la parachutiste peut atteindre ?

Figure 2.11: La rubrique "Intuitivement" et l'exemple 2.19 (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016) en page 78

Les étudiants ont souvent besoin de connaître des domaines où la matière peut s'appliquer et c'est un des apports principaux du manuel de Brunelle et Désautels. Le besoin de visualiser un problème contextualisé est réglé ici par l'image du parachutiste, la rubrique « Intuitivement » et même le solutionnaire plus que détaillé répondant de façon succincte à chacune des trois questions offertes. Une représentation graphique est offerte en supplément pour bien faire comprendre l'idée de la limite à l'infini et du pourquoi on doit ouvrir notre parachute après 53 secondes de chute libre.

La prochaine section de ce manuel se présente dans les pages 81 et 82. Une capture de cette section est donnée à l'appendice C. Cette section porte sur le comportement à l'infini de quelques fonctions. On invite le lecteur à utiliser l'idée des *termes dominants*[13] pour régler les problèmes de limites à l'infini. On précise du même coup que cette technique ne substitue pas un calcul rigoureux de la limite, mais qu'elle donne un sacré bon aperçu de la valeur de la fonction à l'infini. Avant de calculer de façon approfondie les limites, comme on a vu avec Thomas, Finney, Weir et Giordano, selon Brunelle et Désautels, on se doit de bien développer son intuition mathématique pour résoudre ce type de problème. Ce qui est le plus intéressant de cette section est le fait qu'on ne se limite pas à étudier des fonctions rationnelles polynomiales, mais on peut retrouver des logarithmes ou des exponentielles au numérateur aussi bien qu'au dénominateur d'une expression rationnelle. La visualisation mathématique est mise bien en valeur dans ces deux pages.[14] Le laboratoire 2.3 présenté à la 82 a été source d'inspiration pour le questionnaire construit autour de l'activité qui a été expérimentée dans le cadre de cette recherche; nous n'en parlerons donc pas ici.

La dernière section importante de ce manuel dans le cadre de notre recherche est la section 2.4.4 portant sur l'indétermination de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pourquoi cette section est-

[13] Facteurs avec une croissance plus rapide au numérateur et au dénominateur respectivement.

[14] Surtout que ce manuel de CEC est reconnu par les enseignants pour son appui visuel et graphique, son aide en visualisation mathématique. (Laporte, 2016)

elle si importante? Nous désirons étudier les limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales et elles auront souvent, au premier coup d'œil, cette allure d'indétermination que nous devrons apprendre à lever, à rendre significative. L'idée des termes dominants déjà exploitée de façon intuitive par les auteurs aide le lecteur à comprendre pourquoi on divise par la variable affectée du plus haut exposant. À la place d'effectuer une division comme on le faisait chez Thomas, Finney, Weir et Giordano, on effectue plutôt une mise en évidence des termes dominants. Cela paraît beaucoup plus logique et opérationnel chez le lecteur et les limites vers l'infini auront ainsi plusieurs termes tendant vers 0, ce qui facilite les calculs.

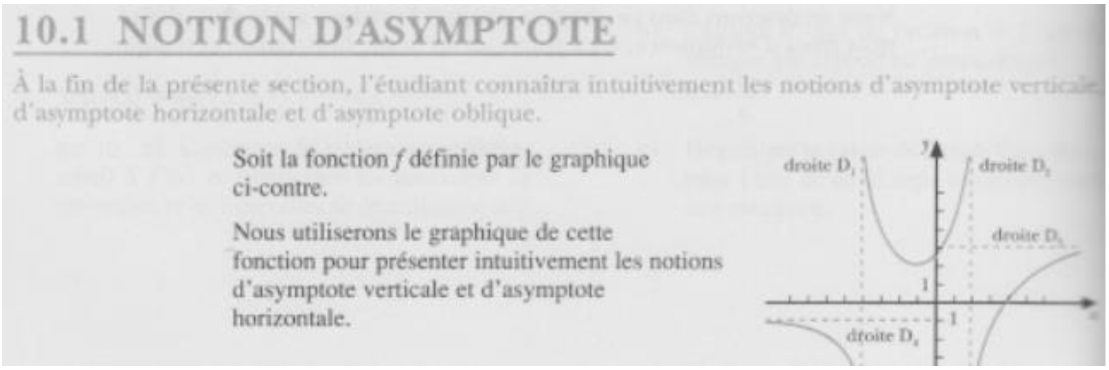
En résumé, le manuel *Calcul Différentiel* de CEC s'appuie sur la visualisation mathématique[15] et sur le développement de l'intuition en mathématiques chez le lecteur. Les exemples ciblés et les laboratoires informatiques permettent de s'approprier la théorie tout en saisissant l'importance de celle-ci dans des contextes bien marqués. Seuls points faibles que j'ai décelés: la notation mathématique utilisée pour inclure l'infini dans les calculs mathématiques alors que les auteurs ont déjà précisé que l'infini n'est pas un nombre réel ainsi que l'utilisation constante des règles sur l'algèbre de l'infini qui ne nous amène pas très loin en termes de niveau de compétences.

2.2.3 CHARRON ET PARENT (1995)

Nous étudierons dans cette section la 4e édition du manuel *Calcul Différentiel et Intégral I* (nouvellement *Calcul Différentiel*) de Charron et Parent (1995). Ce manuel est particulier, car on n'a pas d'énoncés sur les limites à l'infini dans le chapitre ayant trait au calcul de limites, mais on retrouve bien les limites à l'infini dans le chapitre 10 du manuel portant sur les asymptotes. On y retrouve différents objectifs en ce qui touche l'identification des asymptotes d'une fonction. Une notion commune peut être

[15] Selon le sens de Zimmermann & Cunningham (Zimmermann, W & Cunningham, S, 1991)

relevée. Peu importe le manuel, on a toujours joint l'idée de limite à l'infini avec celle d'asymptote.



10.1 NOTION D'ASYMPTOTE

À la fin de la présente section, l'étudiant connaîtra intuitivement les notions d'asymptote verticale, d'asymptote horizontale et d'asymptote oblique.

Soit la fonction f définie par le graphique ci-contre.

Nous utiliserons le graphique de cette fonction pour présenter intuitivement les notions d'asymptote verticale et d'asymptote horizontale.

Figure 2.12: Notion d'asymptote (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 230

À la figure 2.13, on retrouve un exemple de fonction pour définir de façon intuitive la notion d'asymptote. Nous trouvons cela intéressant, car, dans le cadre de notre recherche, nous faisons un lien étroit, tout comme chez Charron et Parent, entre le concept d'asymptote et les limites à l'infini. Nous passerons par-dessus la définition intuitive de l'asymptote verticale, car elle n'est pas à l'étude dans notre recherche et elle n'a aucun lien avec les limites à l'infini, mais bien avec une limite tendant vers l'infini elle-même lorsque la fonction s'approche d'une certaine valeur en abscisse.

Objectif 10.1.2 Comprendre la notion d'asymptote horizontale.

En étudiant le comportement de f, nous voyons que lorsque x tend vers moins l'infini, noté $x \to -\infty$, la courbe de f s'approche de plus en plus de la droite D_4, dont l'équation est $y = -1$ et la fonction f prend des valeurs de plus en plus près de -1, que nous notons

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

Nous voyons aussi que lorsque x tend vers plus l'infini, noté $x \to +\infty$, la courbe de f s'approche de plus en plus de la droite D_3, dont l'équation est $y = 3$ et la fonction f prend des valeurs de plus en plus près de 3, que nous notons

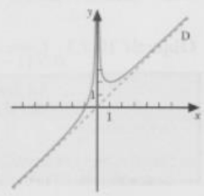
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3.$$

Nous disons alors que les droites D_3 et D_4 sont des asymptotes horizontales.

Remarque Une asymptote d'une fonction est une droite dont se rapproche indéfiniment la courbe de la fonction en devenant presque parallèle à cette droite.

Objectif 10.1.3 Comprendre la notion d'asymptote oblique.

Outre les asymptotes horizontale et verticale, il existe un troisième type d'asymptote, l'asymptote oblique, dont un exemple est donné ci-contre.



Le graphique ci-contre représente la fonction d'équation $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, où nous constatons que pour des valeurs de x, où $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$, la quantité $\frac{1}{x^2}$ devient négligeable par rapport à la quantité x. Cela implique que pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$, la courbe de f se rapproche de la droite D, d'équation $y = x$.

Nous disons alors que la droite D est une asymptote oblique.

Figure 2.13: Notions d'asymptotes horizontale et oblique (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 231

Nous voyons maintenant à la figure 2.14 les notions d'asymptotes horizontale et oblique. L'asymptote horizontale est très bien définie sans tomber dans les erreurs conceptuelles où l'on ne veut surtout pas amener les étudiants. Tendre ne signifie pas s'approcher de quelque chose, mais cela implique un processus dans lequel on sous-entend la notion d'infini potentiel. (On ne peut jamais parler en terme d'infini actuel !) On voit ici que, chez Charron et Parent, on insiste sur la visualisation graphique de l'asymptote, de ce qu'elle représente en tant que tel. Le niveau de langage utilisé est correct et n'amène pas les étudiants en erreur conceptuelle.

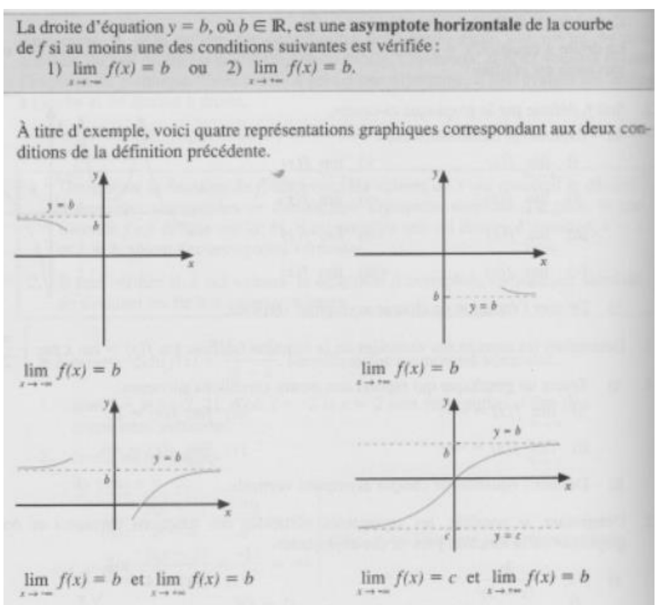
Si l'on continue avec l'idée de l'asymptote oblique, on fait référence encore une fois à l'infini potentiel quand on indique qu'un terme devient négligeable plus la variable *x* devient grande. C'est une bonne idée. L'idée intuitive d'une asymptote oblique est assez claire, mais la technique utilisée pour la trouver l'est un peu moins. La division polynomiale et l'idée des termes négligeables ne sont pas tout à fait clairs.

Exercices 10.1

1. Nommer les trois types d'asymptotes et donner un exemple graphique de chaque type.

Figure 2.14: Premier exercice du chapitre 10 (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 232

Le premier exercice du chapitre 10 emmène une erreur conceptuelle chez l'étudiant : il n'y a pas juste trois types d'asymptotes; il existe autre chose que les asymptotes verticale, horizontale et oblique, erreur fréquente dont nous avons été témoins durant l'expérimentation. On peut aussi faire face à une asymptote de type curviligne. Ce problème n'était pas présent chez Thomas, Finney, Weir et Giordano (2001), car on en parlait dans le chapitre sur la recherche des asymptotes. Le dilemme était absent aussi chez Brunelle et Désautels, car on ne spécifie pas qu'il n'y a que trois types d'asymptotes. Par contre, dans les exercices du chapitre 2 chez Brunelle et Désautels, on invite l'étudiant à rencontrer les asymptotes curvilignes lors d'un exercice pratique de révision. Chez Charron et Parent, on devrait peut-être spécifier que l'on recherche les asymptotes linéaires pour éviter cette erreur conceptuelle et cette ambiguïté.


La droite d'équation $y = b$, où $b \in \mathbb{R}$, est une **asymptote horizontale** de la courbe de f si au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou 2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.

À titre d'exemple, voici quatre représentations graphiques correspondant aux deux conditions de la définition précédente.

Figure 2.15: Les asymptotes horizontales (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 236

En page 236 du manuel de Charron et Parent, on tente une définition formelle de l'asymptote horizontale en mettant le lecteur en contact pour la première fois avec le formalisme de la limite à l'infini. C'est un peu abrupte comme premier contact avec ce dernier. Par contre, l'appui visuel pour comprendre les limites à l'infini, au départ, est une très bonne chose pour les étudiants. La preuve de la continuité de cet appui visuel est encore présent à l'exercice qui suit ces explications.

1 Soit f, définie par le graphique ci-contre.

a) Évaluer les limites suivantes.

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Donner l'équation des asymptotes horizontales.

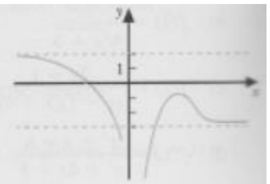


Figure 2.16: Question 1 sur les limites à l'infini et les asymptotes horizontales (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 236

On voit que les auteurs suivent la même ligne de pensée que nous en joignant deux sujets: la notion d'asymptote (horizontale ici) et les limites à l'infini de fonctions. Cela vient confirmer notre idée que ces sujets peuvent être vus conjointement lors d'une activité pédagogique formative.

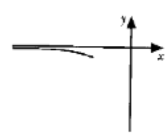
Objectif 10.3.2 Identifier les asymptotes horizontales de la courbe d'une fonction.

Pour identifier les asymptotes horizontales de la courbe d'une fonction f, il faut évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

□ ***Exemple*** Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, où dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Analysons le comportement de f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

Déterminons d'abord les valeurs de $f(x)$ correspondantes pour $x \to -\infty$.

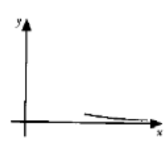
x	-1000	-10 000	-10^6	... $\to -\infty$
$f(x)$	$\frac{-1}{1000}$	$\frac{-1}{10\,000}$	$\frac{-1}{10^6}$	... $\to 0$



Nous écrivons alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, et la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

Déterminons maintenant les valeurs de $f(x)$ correspondantes pour $x \to +\infty$.

x	1000	10 000	10^6	... $\to +\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{10^6}$	... $\to 0$



Nous écrivons alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, et la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

Figure 2.17: Un autre exemple sur les limites à l'infini et les asymptotes horizontales (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 237

À la figure 2.18, nous observons un autre exemple élaboré par les auteurs. Ce que nous aimons de ce manuel est la mise en place de différents exemples selon différents modes de représentation. Dans cet exemple, on aperçoit le formalisme mathématique utilisé pour les limites à l'infini, la présence de table de valeurs (incitant l'étudiant à voir l'infini comme un infini potentiel) et la présence de graphiques représentant les tendances vers moins l'infini et vers plus l'infini. Encore ici, on exploite la notion d'asymptote et de limites à l'infini de façon conjointe. Petit bémol selon nous : lorsque la variable x devient de plus en plus petite (vers moins l'infini), on devrait mettre les données en ordre croissant de gauche à droite au lieu du contraire. Cela faciliterait le travail lorsque les étudiants seront rendus à faire le tableau de variations comme exemple, ou même lors du tracé de graphique plus tard dans la session.

■ *Exemple* Soit $f(x) = 7 - \dfrac{3}{2x-1}$, où dom $f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Déterminons les asymptotes horizontales de cette fonction et donnons l'esquisse du graphique de f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(7 - \frac{3}{2x-1}\right) = 7 \qquad \left(\text{car } \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2x-1} = 0\right).$$

Donc, $y = 7$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(7 - \frac{3}{2x-1}\right) = 7 \qquad \left(\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x-1} = 0\right).$$

Donc, $y = 7$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

La représentation graphique ci-contre est une esquisse du graphique de f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

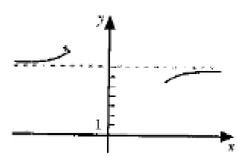
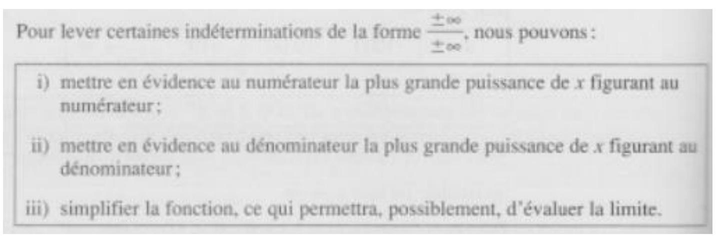


Figure 2.18: Prochain exemple d'asymptote horizontale et de limites à l'infini (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 237

La figure 2.19 présente l'extrait qui suit l'exemple de la figure 2.18. Ici, les tables de valeurs ne sont plus présentées. On passe tout de suite au formalisme mathématique à utiliser lorsque nous faisons des limites. Les réponses sont trouvées rapidement. Le raisonnement mathématique est rapide, mais inefficace dans les circonstances s'il n'y a pas eu d'enseignement préalable.

Expliquons-nous. À la figure 2.18, il faudrait arriver à un consensus général avec les étudiants : « Lorsqu'un nombre est divisé par un nombre gigantesque positif, le quotient sera très près de zéro. »[16] Ce type d'explications est manquant ici chez Charron et Parent (1995). Qui plus est, chez Brunelle et Désautels (2016), on exploitait l'intuition pour faire comprendre cette idée par : « Si tu as une pizza, que tu as un nombre très grand d'amis et que tu désires séparer également ta pizza entre tous tes amis et toi, la pointe reçue par chacun sera de plus en plus mince si ton nombre d'amis est de plus en plus grand. » Nous trouvons donc que le raisonnement mathématique véhiculé à la figure 2.19 est difficilement acceptable sans explications préalables sur le sujet.


Pour lever certaines indéterminations de la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, nous pouvons :

i) mettre en évidence au numérateur la plus grande puissance de x figurant au numérateur ;

ii) mettre en évidence au dénominateur la plus grande puissance de x figurant au dénominateur ;

iii) simplifier la fonction, ce qui permettra, possiblement, d'évaluer la limite.

Figure 2.19: Lever des indéterminations (infini / infini) - (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 238

À la figure 2.20, on voit comment Charron et Parent proposent de lever les indéterminations de la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. On propose une technique très similaire à ce que l'on a vu chez Brunelle et Désautels (2016) avec la technique des termes dominants. On propose donc la même technique, sauf qu'on n'utilise pas cette appellation. Cet élément de théorie coupait l'exemple ci-dessous.

[16] Une idée similaire pourrait être exploitée vers l'infini négatif. Nous passerons par-dessus dans un souci d'économie.

■ *Exemple* Soit $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+7}$, où dom $f = \mathbb{R}$. Évaluons les limites de cette fonction lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$ pour déterminer, s'il y a lieu, les asymptotes horizontales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3}{x^2+7}$ est une indétermination de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3}{x^2+7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} \quad \text{(en mettant en évidence)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{7}{x^2}} \quad \text{(en simplifiant } x^2\text{)}$$

$$= \frac{2-0}{1+0} = 2 \quad \left(\text{car } \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x^2} = 0\right).$$

Donc, $y = 2$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

De façon analogue, nous avons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Donc, $y = 2$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

Figure 2.20: Exemple pour lever une indétermination (infini / infini) - (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 238

Bon coup chez Charron et Parent (1995): il n'y a pas de substitution directe par $\pm\infty$ afin de calculer les limites à l'infini. Il y a donc évaluation mentale pour voir si nous tombons dans un cas d'indétermination ou pour déterminer vers quelle valeur la fonction veut tendre plus la variable indépendante est grande. On évite donc ainsi une erreur conceptuelle de substitution possible généralement dénoncée chez les didacticiens (nous, Dufour (2011), Hitt (2013)) .

■ *Exemple* Soit $f(x) = \dfrac{x^6 + 7}{x^3 + 3x + 4}$, où dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Déterminons, s'il y a lieu, les asymptotes horizontales de cette fonction.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6 + 7}{x^3 + 3x + 4}$ est une indétermination de la forme $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

Levons cette indétermination :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^6 + 7}{x^3 + 3x + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^6\left(1 + \frac{7}{x^6}\right)}{x^3\left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{7}{x^6}\right)}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = -\infty.$$

Donc, f n'a pas d'asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

De façon analogue, nous avons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc, f n'a pas d'asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

Figure 2.21: 2e exemple pour lever une indétermination (infini / infini) - (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 239

Cet exemple est très intéressant, car on utilise encore une fois la méthode des termes dominants afin de lever l'indétermination. Par contre, on a fait la même erreur deux fois plutôt qu'une : on a utilisé le signe d'égalité avec l'infini pour deux calculs de limites alors que l'infini (négatif et positif) ne sont pas des nombres réels par définition. Ici, il y aurait une erreur conceptuelle qui est très répétée au niveau collégial. On devrait opter pour une formulation autre telle que « la fonction diverge plus la variable est grande (ou petite) ». On pourrait, par exemple, utiliser un symbole de vague (~) ou de flèche (→), comme on en utilisait à la figure 2.22 pour signifier qu'il y a eu opération de rapprochement d'un nombre infiniment grand. Or, par abus de langage, l'utilisation de l'égalité avec une quantité infinie, pourrait s'avérer utile pour aider les étudiants lorsqu'ils bâtiront un tableau de variation lors de l'étude de cette fonction ou pour s'apercevoir qu'il y a divergence de la fonction vers plus ou moins l'infini.

Par exemple, si l'on demandait de préparer un tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. On obtiendrait une asymptote verticale en x=1. Par contre, par le calcul de limites à l'infini, on ne pourrait pas affirmer présence d'asymptote horizontale.

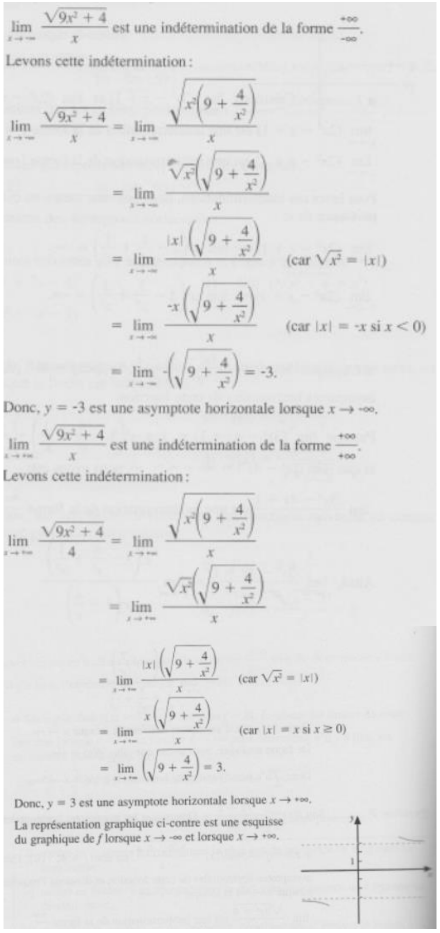
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \sim \frac{\infty}{\infty} (ind\acute{e}termination \text{ à } lever)$$

On devrait utiliser la technique de simplification et factorisation pour réduire l'expression.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to \infty} x + 1 \sim \infty$$

La réponse au calcul de cette limite n'est pas un nombre réel, il n'y aura pas présence d'asymptote horizontale. Le calcul serait similaire pour l'infini négatif. On obtiendrait un tableau de variation partiel similaire au tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	…	1	…	∞
$f(x)$	$-\infty$	Inférieur à 2	∄, car A. V.	Supérieur à 2	∞



$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x}$ est une indétermination de la forme $\frac{+\infty}{-\infty}$.

Levons cette indétermination :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} && (\text{car } \sqrt{x^2} = |x|) \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} && (\text{car } |x| = -x \text{ si } x < 0) \\
&= \lim_{x \to -\infty} -\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right) = -3.
\end{aligned}$$

Donc, $y = -3$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x}$ est une indétermination de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Levons cette indétermination :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{4} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} && (\text{car } \sqrt{x^2} = |x|) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} && (\text{car } |x| = x \text{ si } x \geq 0) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right) = 3.
\end{aligned}$$

Donc, $y = 3$ est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.

La représentation graphique ci-contre est une esquisse du graphique de f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

Figure 2.22: 3e exemple de limites à l'infini et d'asymptotes horizontales (Charron, G. et P. Parent, 1995) en pages 239 et 240

La figure 2.23 montre le 3e exemple du manuel par rapport aux asymptotes horizontales. Deux points importants sont à relever :

- La simplification de $\sqrt{x^2}$ n'est pas simple. Une représentation visuelle du graphique de la fonction valeur absolue à côté de l'exemple aurait été souhaitable pour aider à la résolution. Premièrement, les étudiants ont sûrement oublié l'allure du graphique de cette fonction. Deuxièmement, ils ont été habitués à résoudre des équations comme $x^2 = 9$ et répondre seulement $x = 3$ en oubliant la racine négative qui est tout aussi possible. Il y a ainsi une réflexion à développer chez les étudiants autour des valeurs possibles.

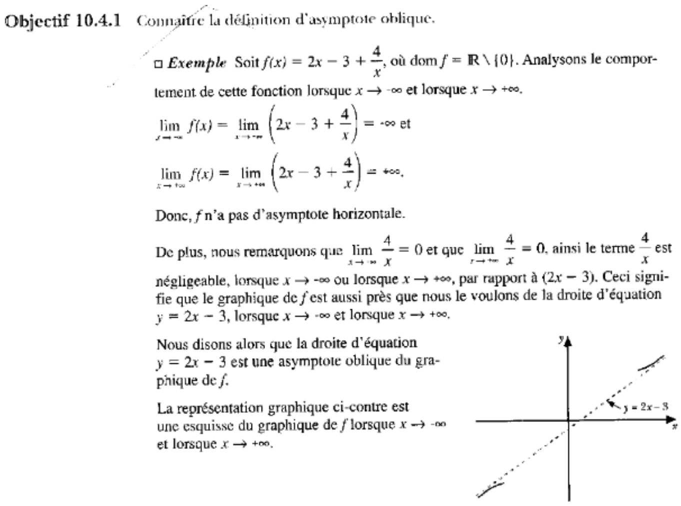
- La représentation graphique de la fonction « près des infinis positif et négatif » n'est pas si évidente que cela. On peut bien comprendre, à l'aide des calculs de limites, qu'il y aura présence d'asymptotes d'équations $y = 3$ et $y = -3$. Par contre, que la fonction passe par le haut ou par le bas de ces asymptotes, ce fait n'est pas clarifié par le calcul des limites. Or, comment les étudiants sont supposés savoir que le graphique de la fonction s'approche par en-dessous ou par au-dessus de l'asymptote à ce point-ci de la matière, et ce, sans autres calculs? Il faudrait alors penser préalablement à la notion de dérivée pour déterminer la forme de la courbe.

Soit $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}$, où $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Donner, s'il y a lieu, l'équation de l'asymptote horizontale selon les valeurs de m et de n.

Figure 2.23: Exercice 9, page 242 (Charron, G. et P. Parent, 1995)

Terminons l'étude des asymptotes horizontales par un regard sur l'exercice 9 de la page 242 (voir figure 2.24). Nous trouvons que cet exercice serait fort difficile à résoudre pour un étudiant de Calcul I en Sciences Humaines (voir que le titre du manuel fait référence aux mathématiques 103). Par contre, cet exercice pourrait faire penser à une piste d'amélioration pour le questionnaire dans une future version de l'expérimentation. Cela pourrait amener une idée de généralisation; on ne devrait pas cerner que trois exemples ou des cas précis. Nous y reviendrons à la section 4.3. du présent document.



Objectif 10.4.1 Connaître la définition d'asymptote oblique.

□ ***Exemple*** Soit $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{x}$, où dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Analysons le comportement de cette fonction lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 3 + \frac{4}{x}\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 3 + \frac{4}{x}\right) = +\infty$.

Donc, f n'a pas d'asymptote horizontale.

De plus, nous remarquons que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$, ainsi le terme $\frac{4}{x}$ est négligeable, lorsque $x \to -\infty$ ou lorsque $x \to +\infty$, par rapport à $(2x - 3)$. Ceci signifie que le graphique de f est aussi près que nous le voulons de la droite d'équation $y = 2x - 3$, lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

Nous disons alors que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique du graphique de f.

La représentation graphique ci-contre est une esquisse du graphique de f lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$.

Figure 2.24: Exemple d'asymptote oblique (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 242

L'exemple à la figure 2.25 veut nous faire prendre conscience que si nous n'avons pas une valeur numérique (un nombre réel) comme réponse à notre limite à l'infini, il n'y aura donc pas présence d'asymptote horizontale. Par contre, il y a toujours abus de langage mathématique en parlant de l'égalité à $-\infty$ et à $+\infty$ (voir les commentaires précédents pour la figure 2.22) ; on devrait utiliser la vague ou la flèche comme décrit en page 65.

De façon implicite, il y a une idée des termes dominants (et des termes négligeables) cachée dans les propos de cet extrait du manuel. Tout ceci est présenté pour nous faire comprendre l'idée de l'asymptote oblique, mais de façon intuitive. La représentation graphique de la fonction « près des infinis positif et négatif » n'est pas si évidente que cela. Comment les étudiants peuvent-ils être en mesure de savoir si le graphique de la fonction passe au-dessus ou en-dessous de l'asymptote présentée? Il faudrait alors, soit demander une analyse plus poussée du point de vue algébrique (aller estimer des valeurs en ordonnées pour des valeurs en abscisses autant pour la fonction que l'asymptote), soit penser à la notion de dérivée préalablement pour déterminer la forme de la courbe. La représentation graphique de l'asymptote est en pointillé pour montrer qu'il ne s'agit pas de la représentation de la fonction et c'est bien ainsi. Par contre, le chapitre 10 est situé après l'apprentissage des dérivées dans le cadre de ce manuel scolaire. Cela sera donc considéré comme de l'acquis.

La droite d'équation $y = mx + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe de f s'il est possible d'exprimer $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = mx + b + r(x), \text{ où } m \neq 0, \text{ et telle que } \lim_{x \to -\infty} r(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to +\infty} r(x) = 0.$$

Figure 2.25: Définition d'asymptote oblique (Charron, G. et P. Parent, 1995) en page 243

La définition d'asymptote oblique donnée par Charron et Parent est assez formelle et complète. Elle emmène principalement deux idées :

- L'expression $r(x)$ représente une expression polynomiale qui est considérée comme étant négligeable (étant donné la limite tendant vers 0 vers plus ou moins l'infini). L'expression $mx + b$ représente la tendance linéaire de la fonction vers plus ou moins l'infini.
- Implicitement, si on pense à une fonction polynomiale rationnelle, nous devrons effectuer la division à crochets pour trouver les termes dominants et le reste sera divisé par le dénominateur de cette fonction. Le *reste* aura une tendance à se diriger vers une valeur constante égalant 0 vers plus ou moins l'infini. On aura donc face à nous l'équation de l'asymptote oblique.

Illustrons le commentaire précédent avec l'exemple de la page 65 (modifié) avec la fonction d'équation $f(x) = \frac{x^2-6}{x-1}$. On devrait faire la division polynomiale tel que $f(x) = (x + 1) - \frac{5}{x-1}$. Or, si l'on cherche maintenant la limite à l'infini de la nouvelle expression, le premier terme tendra vers l'infini, mais en épousant la courbe de $g(x) = x + 1$ (comme asymptote), alors que le deuxième terme deviendra négligeable. Un problème reste présent si le commentaire précédent était rapporté par Charron et Parent (ce qui est notre analyse et pas leurs propos) : il n'y aurait présence d'asymptotes obliques que dans les cas où le degré[17] du numérateur est supérieur

[17] Plus haut exposant d'un polynôme

d'une unité au degré du dénominateur. Dans les autres cas où le degré est supérieur au numérateur de plus d'une unité, nous serions face à des cas d'asymptotes curvilignes et Charron et Parent n'en parlent tout simplement pas.

En bref, le manuel de Charron et Parent, 4e édition, met en valeur les limites à l'infini dans son chapitre 10 avec les notions d'asymptotes horizontales et obliques et ils le font après le chapitre portant sur les dérivées. Un regard sur la table des matières de la 7e édition[18] (dont nous ne disposions pas en version papier, mais la table des matières est disponible en ligne) nous indique que les auteurs ont changé d'idée avec le temps et ont placé la notion de limite à l'infini au chapitre 2 avant le chapitre sur les dérivées (voir figure 2.27). En résumé, on peut dire que dans la 4e édition, quelques erreurs conceptuelles sont présentes en ce qui a trait aux calculs de limites « égalant plus ou moins l'infini » et qu'il y a quelques imprécisions dans les justifications par rapport aux facteurs négligeables dans les calculs de limites à l'infini et par rapport à la courbure du graphique de la fonction (passer au-dessus ou en-dessous de l'asymptote de ce dernier?) qui ne sont pas expliquées en terme de dérivées.

Chapitre 2 Limites et continuité
2.1 Notion de limite
2.2 Indétermination de la forme
2.3 Limite infinie et asymptotes verticales, limite à l'infini et asymptotes horizontales
2.4 Continuité

Figure 2.26: Table des matières de la 7e édition (Les éditions Chenelière, 2017)

2.2.4 HAMEL ET AMYOTTE (2007)

Le manuel *Calcul Différentiel* de Hamel et Amyotte est le premier où l'on voit une définition comme Serret (1894) de la limite à l'infini d'une fonction en mots sans erreur conceptuelle présentée. La voici.

> *« [...] le comportement d'une fonction quand x devient de plus en plus grand ($x \to \infty$) ou de plus en plus petit ($x \to -\infty$)[...] » ((Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 25)*

[18] https://www.cheneliere.ca/7888-livre-calcul-differentiel-7e-edition.html

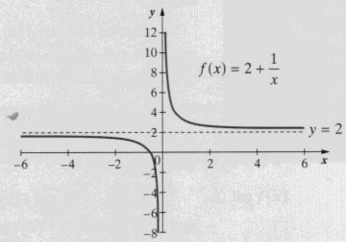
Dans la même page du manuel, les auteurs commencent la section avec un exemple simple, la fonction cubique, $f(x) = x^3$. Le traitement qu'ils en font est en concordance avec leur définition d'une limite à l'infini tout en utilisant différents modes de représentation (aspect graphique, table de valeurs, mots). La seule erreur conceptuelle visible ici est, comme les autres auteurs et pas mal d'enseignants, l'abus de langage dans le formalisme mathématique de la limite à l'infini. On indique alors qu'une limite peut égaler l'infini : on sait bien que l'infini n'est pas un nombre réel. Or, une limite ne peut pas égaler quelque chose qui n'est pas un nombre. On pourra alors dire que la fonction diverge plus x devient grand ou plus il devient petit. C'est une erreur conceptuelle fréquente dans les manuels autant qu'en salle de classe et les didacticiens (nous, Dufour (2011) et Hitt (2013)) tentent d'enrayer cet automatisme. Il faudrait utiliser la flèche ou la vague comme préciser précédemment.

Chez Hamel et Amyotte, il y a un deuxième exemple toujours intuitif par rapport aux limites à l'infini.

Soit la fonction $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ (figure 1.17). Estimons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

FIGURE 1.17

Comportement à l'infini de $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$



On constate que lorsque x devient de plus en plus petit ($x \to -\infty$), la valeur de la fonction $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ s'approche de 2. De plus, lorsque x devient de plus en plus grand ($x \to \infty$), la valeur de la fonction $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ s'approche de 2. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.

Confirmons ces résultats à l'aide de tableaux de valeurs (tableaux 1.12 et 1.13).

TABLEAU 1.12

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

Quand x devient de plus en plus petit ($x \to -\infty$),

x	−1 000	−100	−10	−1
$f(x)$	1,999	1,99	1,9	1

$f(x)$ s'approche de 2.

Figure 2.27: Deuxième exemple de limites à l'infini (Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 26

On utilise encore les représentations graphiques (visuelles) et les tables de valeurs pour en arriver à une approximation de la limite (tout en se rappelant qu'une limite n'est pas nécessairement la valeur de la fonction en une valeur de l'abscisse, mais une tendance).

Par la suite, dans le manuel, les auteurs tentent de définir en mots les différents cas de limites à l'infini de fonctions, mais refont la même erreur conceptuelle que précédemment en égalant des limites à l'infini sachant bien que l'infini n'est pas une quantité définie réelle.

Les auteurs veulent ensuite de définir correctement ce qu'est une asymptote horizontale.

La droite d'équation $y = b$, où $b \in \mathbb{R}$, est une **asymptote horizontale** à la fonction $f(x)$ si au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Figure 2.28: Définition de l'asymptote horizontale (Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 27

En fait, ce que les auteurs indiquent donc est que si la limite à l'infini (ou moins l'infini) d'une fonction donne une constante, nous sommes donc en présence d'une ou deux asymptotes horizontales, car les limites peuvent différer à plus ou à moins l'infini.

Donc, selon notre regard sur les limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales, on aurait des asymptotes horizontales dans les cas où le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur. Ce n'est pas indiqué pour l'instant dans le manuel, mais nous pensions que ce soit important d'en faire part à ce moment-ci.

Ensuite, en page 27 du manuel, les auteurs présentent le tableau suivant (voir figure 2.30) qu'ils nomment Propriétés des limites :

TABLEAU 1.15 ▼

Propriétés des limites*

Si k est un nombre réel et si n est un entier positif, alors

9. $\lim_{x \to -\infty} k = k$ et $\lim_{x \to \infty} k = k$
10. $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
11. $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$
13. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$
14. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ si n est impair et $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x}$ n'existe pas si n est pair

Figure 2.29: Propriétés des limites à l'infini (Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 27

Ce tableau est une continuité logique pour Hamel et Amyotte du tableau des propriétés des limites usuellement utilisées. Par contre, ces règles peuvent aider à régler des calculs de limites à l'infini, sauf qu'elles enfreignent la règle comme quoi l'infini n'est pas un nombre. Donc, certaines de ces règles (10, 11, 13 et 14) seraient erronées. Chose intéressante : les auteurs le savent bien et viennent s'assurer que l'on ne tombe pas dans ce piège.

> Il faut faire très attention lorsqu'on manipule des expressions contenant le symbole ∞. Qn ne doit pas oublier que l'infini (∞) et moins l'infini ($-\infty$) ne sont pas des nombres réels et ne se comportent donc pas comme tels. Tout au plus, ces deux symboles décrivent notamment le comportement d'une fonction qui croît $[f(x) \to \infty]$ ou décroît $[f(x) \to -\infty]$ sans borne.

Figure 2.30: Importance de la notation avec l'infini (Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 27

Comme avec le manuel de Brunelle et Désautels, Hamel et Amyotte ont osé jongler avec l'idée de l'algèbre de l'infini en détaillant un tableau sur ce dernier.

Forme	Résultat
$\infty \pm k$	∞
$\infty + \infty$	∞
$\infty \times \infty$	∞
$k \times \infty$	$\begin{cases} \infty & si \quad k > 0 \\ -\infty & si \quad k < 0 \end{cases}$
$\frac{k}{\infty}$	0
$\frac{k}{0^+}$	$\begin{cases} \infty & si \quad k > 0 \\ -\infty & si \quad k < 0 \end{cases}$
$\frac{k}{0^-}$	$\begin{cases} -\infty & si \quad k > 0 \\ \infty & si \quad k < 0 \end{cases}$

Figure 2.31: Algèbre de l'infini (Hamel, J. et L. Amyotte, 2007) en page 28

On a déjà dit que ce tableau pouvait s'avérer aidant pour les étudiants en calcul différentiel. Par contre, les didacticiens (nous, Dufour (2011) et Hitt (2013)) sont contre la substitution directe du symbole de l'infini dans l'expression à évaluer. Que le résultat d'une opération mathématique, en occurrence la limite, soit égale à l'infini devient quelque peu absurde surtout connaissant bien la nature de l'infini. Or, ce tableau serait à prendre avec un grain de sel, car ce n'est qu'une aide pour se diriger avec notre calcul mental. La majorité des étudiants, et même certains enseignants, seront pris à écrire des erreurs mathématiques en égalant une limite à $\pm\infty$. Malgré tout, il vaut mieux écrire des traces de nos calculs pour être évalué, non?

Les auteurs ont été ingénieux, car, par la suite, ils font des rappels importants pour le calcul des limites : la mise en évidence simple, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, la mise en évidence double, etc. On nous indique aussi la présence d'un « compagnon Web » qui nous donnera de plus amples détails sur les contenus du secondaire qui pourraient nous être utiles dans la résolution de calculs de limites.

Quand on indique qu'on pourrait faire face à des indéterminations, on nous donne accès à un théorème qui était peut-être inconnu jusque là par les étudiants. Le théorème indique que, si a est une racine d'un polynôme $P(x)$, alors $P(x)$ peut se réécrire comme $P(x) = (x - a)R(x)$. Ce théorème peut s'avérer fort utile pour la factorisation au numérateur et au dénominateur d'une expression rationnelle polynomiale, mais c'est très peu utile pour les limites à l'infini. Ce théorème est évoqué aussi chez Brunelle et Désautels au chapitre sur les limites et les indéterminations.

En pages 37 et 38 du manuel, quand on commence à évoquer les indéterminations de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on utilise comme chez Brunelle et Désautels, comme chez Charron et Parent, la mise en évidence de termes dominants au numérateur et au dénominateur afin de faciliter drastiquement le calculs de limites à l'infini. C'est donc un trait commun dans les trois manuels les plus utilisés au Québec en Calcul I. En aucun cas dans les exemples qui suivent (1.35 à 1.38), on n'aura vu une substitution directe par l'infini (ou moins l'infini) dans les expressions offertes. C'est une erreur conceptuelle qui est évitée. Par contre, à l'exemple 1.36, l'erreur récurrente que nous soulignons depuis le début est présente, on égale une limite à $-\infty$.

En aucun cas, on aura parlé de trois cas de limites à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles. On s'est limité aux calculs et aux explications générales de ceux-ci. En bref, Hamel et Amyotte refont les mêmes types d'erreurs généralement faits chez Charron et Parent, chez Brunelle et Désautels et même chez Thomas, Finney, Weir et

Giordano. Une particularité se dessine chez eux : ils ont un fort accent mis sur le passage d'un mode de représentation à un autre et cela les distingue. La visualisation mathématique est aussi utilisée à bon escient.

2.2.5 RÉSUMÉ DE L'ANALYSE DES MANUELS ET CONSTAT

Tentons de mettre un peu d'ordre dans ce que l'on vient de trouver dans les 4 manuels précédents par rapport à l'idée de la limite à l'infini et ce qu'on dit dans la littérature.

Définitions des manuels	Définition formelle	Constats / Commentaires
« […] le comportement d'une fonction quand x devient de plus en plus grand (x→∞) ou de plus en plus petit (x→-∞)[…] » (Josée Hamel et Luc Amyotte, 2007)	Lorsque les valeurs successives d'une variable x se rapprochent de plus en plus de la valeur d'une constante a, de manière que la valeur absolue de la différence x-a puisse devenir et demeurer constamment inférieure à une quantité donné quelconque, on dit que la variable x a pour limite la constante a. (Serret, 1894)	Serret a utilisé un minimum de symboles pour donner une définition en mots. Devrait-on utiliser une définition similaire pour l'introduction de la limite? La définition intuitive de Hamel et Amyotte pourrait être correcte si on ajoutait les termes constant ou divergent au comportement. J'utilise la définition de Brunelle et Désautels en classe.

<table>
<tr>
<td>
1.3.1 Définitions Limites à l'infini $x \to \pm\infty$
1. Nous disons que la limite de $f(x)$ est L lorsque x tend vers l'infini, et nous écrivons
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L quand x s'éloigne de l'origine dans le sens positif.
2. Nous disons que la limite de $f(x)$ est L lorsque x tend vers moins l'infini, et nous écrivons
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
si $f(x)$ devient arbitrairement proche de L quand x s'éloigne de l'origine dans le sens négatif.

(Thomas, Finney, Weir, Giordano, 2001)

DÉFINITION 4
Limite à l'infini
• Nous dirons que $L \in \mathbb{R}$ est la limite d'une fonction $f(x)$ dans le cas où x tend vers l'infini, si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus près de L lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes, que nous noterons :
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
• Nous dirons que $L \in \mathbb{R}$ est la limite d'une fonction $f(x)$ dans le cas où x tend vers moins l'infini, si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus près de L lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus petites, que nous noterons :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

(Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016)
</td>
<td></td>
<td>
Deux définitions très semblables chez les auteurs Thomas, Finney, Weir et Giordano ainsi que chez Brunelle et Désautels. Cette définition est plutôt intuitive, imagée et devient incomplète si nous faisons face à une fonction divergente quand la variable devient de plus en plus petite (ou plus grande). Il n'y a pas d'erreur conceptuelle sur la nature de l'infini ici.

Chez Charron et Parent, il y avait absence de définition de la limite à l'infini dans la 4e édition. Par contre, il semble que les auteurs aient corrigé le tir dans la nouvelle édition (7e).
</td>
</tr>
</table>

Tableau 2.1: Définitions des limites à l'infini et commentaires

Nous privilégierons les définitions des manuels. Les limites à l'infini doivent être enseignées en passant par l'intuition tout d'abord et, ensuite, le formalisme mathématique devrait prendre la place qui lui revient. La définition intuitive de Brunelle et Désautels nous convient donc.

Définitions des manuels	Définition formelle	Constat / Commentaires
Nous avons aperçu aussi dans les manuels que la notion d'asymptote n'était pas claire pour les étudiants. *Définition* La droite d'équation $y = b$, où $b \in \mathbb{R}$, est une **asymptote horizontale** de la courbe de f si au moins une des conditions suivantes est vérifiée : 1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou 2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$. *Définition* La droite d'équation $y = mx + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe de f s'il est possible d'exprimer $f(x)$ sous la forme $f(x) = mx + b + r(x)$, où $m \neq 0$, et telle que $\lim_{x \to -\infty} r(x) = 0$ ou $\lim_{x \to +\infty} r(x) = 0$.		Chez Charron et Parent, autant que chez Thomas, Finney, Weir et Giordano et Hamel et Amyotte, on définit l'asymptote horizontale comme étant une droite et elle n'est présente que si la limite à l'infini est une constante. Chez Charron et Parent, on définit l'asymptote oblique comme ci-contre en définissant la fonction de base en termes négligeables et en termes dominants.

		Chez Thomas, Finney, Weir et Giordano, on évoque plutôt que la limite de la différence entre la fonction et l'asymptote devra tendre vers 0 vers l'infini. Aucun des trois manuels cités ici n'évoque la présence d'asymptote qui ne sont pas des droites.
« Une asymptote est une droite ou une courbe de laquelle la courbe d'une fonction s'approche d'aussi près que l'on veut. » (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016)		Chez Brunelle et Désautels, on a crû bon de mettre en évidence le fait qu'il y a des asymptotes qui ne sont pas strictement linéaires. Nous apprécions la convivialité de cette définition. Leur définition de l'asymptote horizontale est similaire celle présentée dans les deux autres manuels.

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=L_1$ ou $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=L_2$, $L_1 et\ L_2 \epsilon \mathbb{R}$, alors il y a présence d'une asymptote oblique. Pour l'obtenir, il faut diviser le numérateur par le dénominateur de l'expression rationnelle. Les termes dominants du résultat formeront l'équation de l'asymptote oblique. (Brunelle, É et M.-A. Désautels, 2016)		Intéressante remarque, mais elle semble compliquée. Dans un temps, il faut prouver la présence d'une asymptote oblique et, ensuite, il faudra calculer son équation. Ce n'est qu'en exercices récapitulatifs (exo 21, p.116) que les auteurs nous présentent l'asymptote curviligne sans la définir, mais en montrant comment prouver sa présence.

Tableau 2.2: Définition des asymptotes et opinion

En conclusion, pour la définition d'asymptote, nous opterons pour celle de Brunelle et Désautels vu qu'elle semble beaucoup plus inclusive que les autres.

2.3 RÉFLEXIONS SUR UNE NOUVELLE APPROCHE TECHNOLOGIQUE

Par le passé, comme étudiant universitaire, je devais utiliser le logiciel MAPLE dans le cadre de mes cours de mathématiques, on utilisait le logiciel pour s'approprier le logiciel (sous une génése instrumentale). Par contre, aujourd'hui, avec un regard d'enseignant et de chercheur, je trouve que c'est absurde d'utiliser du temps de classe pour utiliser un logiciel complexe pour, finalement, ne pas favoriser l'acquisition de compétences ou d'habiletés dans le cadre du cours de mathématiques. Il faut plutôt insister pour acquérir le langage compliqué du logiciel en question.

L'idée de l'activité autour de laquelle se situe la recherche et de mon utilisation en salle de classe est fort simple. Je cherchais un logiciel facile d'utilisation où je ne perdrais pas beaucoup de temps en instrumentation avec mes étudiants. De plus, je désirais un logiciel gratuit (pour les causes budgétaires de mon établissement scolaire) et multilingue (pour les mêmes raisons avec les étudiants internationaux, et vu que mon collège est bilingue). Je voulais aussi que le logiciel puisse favoriser le passage d'un mode de représentation à un autre sans trop de heurt. GeoGebra est le logiciel que j'ai choisi pour toutes les raisons nommées précédemment. Or, dans les prochaines années, les établissements collégiaux seront invités à intégrer le profil TIC dans la majorité de leurs cours et programmes. Au Collège LaSalle, nous voulons rapidement intégrer les compétences de ce profil dans les cours du programme de Sciences Humaines. Les mathématiques ne feront pas bande à part. Les compétences 4 et 5 du profil TIC pourraient aisément être intégrées dans le cadre du cours et cela suivrait l'idée des laboratoires GeoGebra dans une classe de Calcul I (voir figure 2.33).

4 **Travailler en réseau**

En éducation, tout comme dans le milieu du travail, les outils de communication à distance et de télécollaboration connaissent un essor important. Pour s'ouvrir sur le monde et pour être pleinement fonctionnel à l'ère du numérique, savoir communiquer à distance, partager des contenus et collaborer en réseau est devenu essentiel.

Cette habileté propose trois types d'activités de travail en réseau dont les étapes de réalisation suivent un parcours semblable. Qu'il s'agisse de communiquer, de partager ou de collaborer, l'étudiant doit d'abord définir les objectifs et le contexte pour bien comprendre la tâche à réaliser, puis sélectionner l'outil approprié. Il lui faut également prévoir les aspects logistiques, techniques ou organisationnels pour assurer la réussite des actions à poser. Il doit aussi pouvoir exploiter correctement les fonctionnalités des outils de communication, de partage ou de collaboration pour atteindre ses objectifs. Il est finalement nécessaire d'appliquer les bonnes pratiques relatives à la tâche à accomplir.

5 **Exploiter les TIC de manière efficace et responsable**

L'appropriation de cette habileté s'inscrit dans la perspective de former des citoyens à la fois efficaces et responsables dans leur utilisation des technologies.

Cette habileté propose un coffre à outils qui permet à l'étudiant :

- d'exploiter efficacement les technologies à travers son parcours collégial en maîtrisant son environnement de travail et en développant son autonomie.
- d'adopter de saines habitudes de vie au regard de son utilisation des TIC.
- de développer un ensemble de comportements qui l'encourageront à être un citoyen conscient, averti et responsable.

Figure 2.32: Compétences 4 et 5 du profil TIC (ProfWeb, 2017)

L'idée n'est pas anodine et peut se coller aux deux compétences nommées précédemment. Le travail d'équipe est favorisé : la collaboration est de mise entre les membres d'une même équipe, l'un avec les mains à l'ordinateur, l'autre avec les mains sur le papier et le crayon, échangeant leur rôle durant l'exercice. En allant sur le Web pour partager leur travail fait sur GeoGebra, les équipes devront communiquer leurs résultats via la plateforme Omnivox/Léa pour qu'ils se rendent aisément à leur enseignant. En favorisant un travail d'instrumentation avec un laboratoire de base, on peut aider les étudiants à « exploiter efficacement les technologies […] en maîtrisant [leur] environnement de travail et en développant [leur] autonomie » (ProfWeb, 2017). Plus nous avançons dans la session, plus les étudiants seront autonomes dans leur utilisation de GeoGebra et pourront progresser dans leurs apprentissages de la matière en Calcul I.

Dans une session, on commence généralement un cours de calcul différentiel par une révision des concepts vus au niveau du 4e et 5e secondaire en algèbre et autour des fonctions et des asymptotes. Un premier laboratoire d'exploration de GeoGebra autour des concepts du secondaire peut être élaboré pour aider les étudiants dans leur instrumentation qui servira plus loin lors de la future expérimentation durant la session. L'idée du premier laboratoire est de favoriser la visualisation des graphiques de base qui serviront tout au long de la session, car si on est en mesure de visualiser les graphiques des fonctions, nous avons déjà un bout de chemin de fait. D'un côté technologique, on veut habileter l'étudiant à saisir l'équation d'une fonction dans la zone de saisie de GeoGebra afin d'en faire afficher le graphique. Aussi, on aimerait explorer les *zooms* (agrandissement ou rapetissement), le déplacement du graphique, les impacts de la variation des paramètres de différents types de fonctions, l'utilisation du calculateur symbolique et du tableur. L'activité en laboratoire informatique suivra donc dans les cours qui suivent en espérant pas trop d'impacts des lectures hors classe. J'espère que les étudiants ne feront pas trop de lectures en guise de préparation pour le laboratoire, car cela aura peut-être un impact sur leur compréhension de la matière.

2.4 PROPOSITION POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES AUTOUR DU CONCEPT DE LIMITE

Après avoir favorisé une bonne instrumentation chez les étudiants avec le logiciel GeoGebra (voir l'appendice D comportant ce laboratoire d'instrumentation), nous allons partir vers une expérimentation d'une activité encadrée sans aide directe de l'enseignant. Après avoir étudié le concept de limite de façon intuitive, les concepts de limite à gauche, de limite à droite et de limite en une valeur précise, nous voudrions étudier les limites à l'infini tout en explorant le concept d'asymptotes horizontale, oblique et curviligne chez les étudiants (en évitant le concept d'asymptote verticale, qui n'est pas à l'étude ici).

La question est maintenant de savoir comment nous allons faire pour obtenir des réponses à notre question de recherche et aux questions sous-jacentes à celle-ci.

Suite à une séance d'instrumentation autour de GeoGebra avec les étudiants, dans un second temps (un autre bloc de cours), les étudiants auront un questionnaire à remplir et des exercices à compléter avec l'aide du logiciel GeoGebra. Au fur et à mesure que l'étudiant avancera dans la complétion de l'exercice, il répondra aux questions du questionnaire. Ce questionnaire est situé à l'appendice E de ce document. L'analyse complète de ces questionnaires permettra de répondre aux questions de recherche.

Tout d'abord, l'analyse des réponses et de la section « Résumé » du questionnaire permettra de voir si les étudiants ont bien compris ce dont il est question dans celui-ci, surtout si les réponses sont logiques, succinctes et bonnes. De plus, nous verrons, dans le reste de la section « Résumé », si les étudiants, en équipe de 2, sont disposés à répondre à des questions similaires à celles explorées dans le questionnaire de recherche sur les limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales. Ceci va permettre de répondre à la question sur la tendance socioculturelle en salle de classe, à la place d'un simple esprit collaboratif en situation-problème hors classe.[19] Les première et troisième sous-questions sont un peu plus compliquées à résoudre, car elles n'auront pas de réponses directement dans le questionnaire. La question sur la visualisation mathématique ne sera que vue par les yeux de l'enseignant un peu plus tard durant la session pour en saisir l'impact en salle de classe sur les étudiants. La question sur le passage d'un mode de représentation à un autre sera perceptible et visible par l'enseignant-chercheur en salle de classe lors de l'expérimentation. Il sera alors conseillé à l'enseignant-chercheur de tenir un journal de bord pour prendre des notes sur les actions des étudiants lors de cette expérience pour ne pas oublier des éléments essentiels qui pourraient alors servir lors de l'analyse des résultats.

[19] Exploré en salle de classe avec ma recherche-action sur les "selfies-vidéos" en classe d'algèbre linéaire et géométrie vectorielle et auprès de la communauté-classe virtuellement parlant.

CHAPITRE III- EXPÉRIMENTATION

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons décrire l'échantillon d'étudiants qui a participé à l'étude. Par la suite, nous allons explorer l'approche pédagogique utilisée ainsi que la méthodologie choisie pour effectuer l'expérimentation. Nous présenterons, de plus, la construction du questionnaire et les réflexions desquelles ont émané les questions. Nous pourrons par la suite conclure le chapitre avec l'analyse des résultats obtenus lors de l'expérimentation effectuée en salle de classe à l'automne 2017 avec mes étudiants. On concevra bien entendu notre laboratoire en salle de classe à cause de la non-disponibilité de laboratoire informatique au Collège lors des périodes de classe de Calcul I.

3.2 DESCRIPTION DE LA POPULATION

La population à l'étude est un groupe-classe de 2 étudiants majeurs en Calcul I, volet francophone, au Collège LaSalle (collège privé) à Montréal à la session automne 2017. Les étudiants en question ont un bagage théorique très varié. Une chose les relie: généralement, ils ne sont pas très forts en algèbre. Leurs compétences mathématiques sont assez limitées pour la plupart: certains étudiants ont oublié une part de leur bagage mathématique venant du secondaire (peut-être parce que cela fait longtemps qu'ils n'ont pas été en salle de classe de mathématiques).

Nous avons choisi les étudiants de Sciences Humaines pour plusieurs raisons. La première est qu'il sera facile d'avoir accès à ces étudiants vu que c'est moi qui offre le cours de calcul différentiel dans ce programme. Nous n'offrons pas le programme de Sciences de la Nature dans cet établissement. La deuxième raison est un préjugé que j'ai comme enseignant : je crois que les étudiants qui choisissent le programme de Sciences Humaines sont généralement moins forts en algèbre que les étudiants de Sciences de la Nature, malgré que le préalable demandé soit exactement le même : Mathématiques SN de 5$^{\text{ième}}$ secondaire ou le cours de mise à niveau SN de 5$^{\text{ième}}$ secondaire (ou anciennement, mathématiques 526 ou 536). Selon moi, il est plus aisé d'observer une amélioration dans la compréhension de concepts avec des gens qui auraient un peu moins les préalables mathématiques solides. De plus, nous avons une très forte concentration de garçons en mathématiques : je crois que ceux-ci sont généralement plus faibles en Calcul 1 (un autre préjugé). J'ai l'impression que les garçons apprennent différemment des filles et sollicitent des types de représentations différents de celles-ci. Ils auraient peut-être une tendance à utiliser plus la visualisation mathématique. Une dernière raison qui m'a amené à étudier mes propres étudiants du Collège LaSalle : nous recevons une part d'étudiants de l'International avec souvent un bagage très différent en mathématiques (spécifiquement en algèbre). Pour toutes ces raisons, mes étudiants de Calcul 1 en Sciences Humaines au Collège LaSalle forment un échantillonnage adéquat et fort intéressant, soit un mélange d'étudiants de systèmes éducatifs différents et de sexes différents.

3.3 NOTRE APPROCHE PÉDAGOGIQUE

Nous allons utiliser « la méthodologie ACODESA[20], pour la construction de concepts mathématiques et la résolution de situations problèmes » (Hitt, 2008 en page 3). Si nous résumons la méthode par rapport à notre expérimentation, on pourrait la définir en différentes étapes comme suit :

- Travail individuel: productions de représentations graphiques avec aide d'un logiciel, exploration individuelle du concept de limite à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles et tentative pour en dégager les caractéristiques;
- Travail en équipe de 2 sur la même tâche: processus de discussion, validation des caractéristiques des limites à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles, raffinement des représentations fonctionnelles et des techniques pour calculer une limite à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles;
- Débat (qui peut devenir un débat scientifique en groupe-classe): processus de discussion et validation entre étudiants (raffinement des représentations fonctionnelles, ou les représentations que les étudiants se forgent);
- Retour sur la tâche: travail individuel qui consiste en une reconstruction de ce qui a été fait en classe dans les étapes précédentes;
- Institutionnalisation: processus d'institutionnalisation et utilisation des représentations institutionnelles, ou celles qui devraient être enseignées, par l'enseignant. Au prochain cours, lien entre l'expérimentation, la théorie sous-jacente et les points de vue des étudiants. Ce doit être un moment propice à la discussion et au partage d'opinions et d'arguments.

Nous utiliserons donc cette série d'étapes lors de l'expérimentation, mais ce ne sont que les 4 premières étapes qui peuvent vraiment servir lors de notre étude, car l'institutionnalisation n'est pas nécessaire pour répondre à nos questions de

[20] Liée à une approche socioculturelle basée sur la théorie de l'action de Leontiev. ACODESA signifie apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion

recherche; on veut vraiment étudier le comportement et l'apprentissage des étudiants dans un processus d'apprentissage en absence d'un enseignant coopérant au processus. Nous voulons voir si un étudiant peut auto-construire son savoir individuellement, s'il peut le peaufiner avec aide de collègues dans la classe, s'il peut justifier ses actions et ses choix et les expliquer convenablement à ses collègues. Finalement, on veut savoir si la compréhension n'est pas le fruit du hasard en renforçant le tout avec des exercices similaires à faire à la maison. L'institutionnalisation consiste à voir avec les étudiants s'ils ont bien compris lors d'un retour en grand groupe à une période ultérieure. Notez que l'enseignant est présent en classe comme aide avec la technologie ou pour comprendre l'idée d'une question.

3.4 CRÉATION DE L'ACTIVITÉ ET DU QUESTIONNAIRE

Contrairement à la majorité des chercheurs, je n'ai pas débuté ma recherche d'une problématique dès le départ de ce travail. C'est plutôt l'élaboration et la clarification d'activités d'enseignement aux côtés de Messieurs Boileau et Hitt qui ont fait découler le reste de ce travail et qui m'a fait réfléchir aux fondements de ma problématique de recherche. Le peaufinement des activités élaborées s'est fait graduellement avec l'aide de M. Hitt et au fil des sessions où j'enseignais le cours de Calcul I. À force de plusieurs expérimentations répétées sur mes étudiants des années passées, j'ai pu voir ce qui fonctionnait et ce qui ne fonctionnait pas dans les activités; j'ai pu alors changer des mots, des fonctions, des expressions dans mes cours. De plus, j'ai vu que 2 heures ne sont pas suffisantes pour effectuer conscieusement ce laboratoire. Or, je réserverai un bloc de 3 heures pour avoir suffisamement de temps pour effectuer l'expérimentation. Nous allons voir maintenant l'ordre des questions de ce questionnaire final (voir appendice D), le contenu de celui-ci et pourquoi nous avons aller vers ce choix de questions. Ainsi, l'élaboration des activités est passée par un long processus de raffinement avant de faire une expérimentation définitive.

Les activités finales (questionnaire de recherche situé à l'appendice E), sont composées d'une trentaine de questions et de nombreuses actions à poser par les étudiants avec le logiciel. Regardons tout d'abord la première page du questionnaire qui est composée de questions préalables sur le concept d'asymptote. En effet, on a souvent besoin d'aborder le concept d'asymptote lorsque nous parlons de limites à l'infini. De plus, les étudiants ont vu certaines fonctions au niveau du secondaire telles les fonctions exponentielle, logarithmique et rationnelle. Une question similaire est posée dans la section « Résumé » du questionnaire pour mesurer s'il y a eu modification ou amélioration de la définition de l'asymptote chez l'étudiant. De plus, on demande à l'étudiant de résumer sa pensée de façon succincte suite au laboratoire pour vérifier s'il arrive à des résultats similaires à Thomas, Finney, Weir et Giordano (voir appendice A) quant aux trois cas de figure de limites à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles, mais surtout s'il sera en mesure de les expliciter. Cela a un but de comparatif entre le « avant » et le « après » activité pour vérifier s'il y a eu acquisition de connaissances ou pas ainsi, pour vérifier s'il y a eu auto-construction du savoir par l'étudiant.

Par la suite, nous avons élaboré trois sections distinctes dans le questionnaire pour illustrer les cas de figure de limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales : lorsque le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur; lorsque le numérateur a un degré égal à celui du dénominateur et lorsque le numérateur a un degré supérieur à celui du dénominateur. Bien entendu, aucune expression logarithmique ou exponentielle n'est visible dans nos expressions fonctionnelles du questionnaire, car elles ne sont pas algébriques. De plus, les expressions trigonométriques n'ont pas lieu d'être, car elles ne sont pas à l'étude dans ce cours. Nous nous limiterons donc qu'à des fonctions rationnelles polynomiales pour notre étude.

Chacune des sections a une forme similaire. Nous offrons une fonction, suivant l'un des trois cas précédent dans l'ordre, et demandons tout d'abord une étude visuelle de celle-ci (voire un tracé sommaire) et si la fonction a un comportement asymptotique selon l'étudiant. On demande aussi vers quelle valeur la fonction semble se diriger vers l'infini pour avoir une première idée de limite à l'infini pour une fonction polynomiale rationnelle. Alors, nous demandons à l'étudiant d'utiliser le support informatique, le logiciel GeoGebra, afin de tracer la fonction de façon précise et de comparer sa vision du graphique avec la vision réelle.

Ensuite, nous proposons à l'étudiant de réfléchir sur la limite à l'infini de la fonction à l'étude sans l'identifier comme tel. On invite l'étudiant à modifier la fenêtre de définition de la fonction afin de mieux voir le comportement de la fonction plus que l'abscisse augmente en utilisant différents outils de base de GeoGebra tout en prenant en note les modifications qu'il a apportées au graphique.

Or, on demande à l'étudiant d'avoir recours à ses connaissances antérieures afin de trouver une fonction ayant un comportement similaire. L'étudiant devra ensuite expliquer pourquoi il a décidé de prendre cette fonction en temps que tel. Par la suite, il devra opérer sur GeoGebra pour calculer la soustraction entre la fonction à l'étude et celle choisie. Si la nouvelle fonction ainsi créée a une limite à l'infini tendant vers 0, cela signifie que les deux fonctions ont la même limite à l'infini. Alors, on demande de façon directe d'évaluer la limite à l'infini de la fonction à l'étude. Il faut enregistrer le fichier sur le bureau de l'ordinateur ou en faire une capture si cela est trop compliqué. On demande déjà à l'étudiant de voir s'il y a quelque chose de particulier par rapport aux fonctions à l'étude afin de voir s'il est en mesure de ressortir une conclusion par rapport aux limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales en général.

On demande à l'étudiant de vérifier par lui-même si son hypothèse a du sens. On lui demande parfois si d'autres fonctions auraient un comportement similaire à la fonction à l’étude tout en nous spécifiant la limite à l’infini des fonctions en questions.

La dernière série de questions du questionnaire porte sur le travail à faire en équipe pour favoriser la période de travail en équipe de 2 selon la méthode ACODESA. Le débat viendra ensuite en corrigeant ces exercices au tableau par les pairs sans intervention théorique de l’enseignant, mais avec possibilité d’obtenir une aide technologique ou de compréhension de la question. On demandera aux étudiants d’écrire avec une autre couleur s’ils modifient d’une façon ou d’une autre une réponse dans le questionnaire, dans le résumé ou dans les exercices.

Rappelons-nous la question de recherche de base : « Une utilisation encadrée du logiciel GeoGebra, dans le cadre d’un cours de calcul différentiel, peut-elle aider les étudiants à auto-construire certains concepts afférents autour des limites à l’infini de fonctions rationnelles polynomiales? »
Pensons aussi aux sous-questions : • L’utilisation libre du logiciel GeoGebra peut-elle favoriser la visualisation mathématique chez des étudiants où cela était difficile avant? • La tendance socioculturelle de l’activité encadrée peut-elle favoriser la collégialité, la collaboration entre les étudiants en absence d’aide théorique de l’enseignant? Est-ce que cela peut favoriser les apprentissages en classe de mathématiques? • Est-ce que l’utilisation libre du logiciel GeoGebra, axé sur la visualisation mathématique, fait en sorte de favoriser le passage d’un mode de représentation mathématique à un autre de la part de l’étudiant?

Tableau 3.1: Question de recherche et sous-questions

La question de recherche pourra être étudiée de plusieurs façons en regardant les différentes questions du questionnaire et les fichiers informatiques téléversés par les étudiants, en explorant en salle de classe lors de l’expérimentation et en prenant note des faits exceptionnels et divers. L'écriture, selon un code couleur pour le côté individuel et à deux, et après avec intervention du groupe, selon une autre couleur pour les ratures et modifications, pourra nous permettre de voir l'évolution de la pensée mathématique de l'étudiant.

La seconde sous-question pourra être étudiée d'une façon similaire sur le questionnaire selon le code couleur ainsi que lors des échanges verbaux et écrits lors de la séance de débat (selon la méthode ACODESA). L'enseignant-chercheur devra prendre des notes de ses observations lors de cette période de débat.

Les première et troisième sous-questions poseront problème, car elles ne sont pas si évidentes à répondre. Elles pourront être partiellement répondues grâce aux observations faites lors de l'expérimentation par l'enseignant-chercheur. Sinon, elles auraient aussi une réponse plus loin dans le cadre d'une session.

3.5 ANALYSE DE RÉSULTATS APRÈS EXPÉRIMENTATION

3.5.1 QUESTIONS PRÉALABLES

Étudions tout d'abord les questions afférentes au concept d'asymptote. Nous regarderons, pour commencer, les questions préalables 1 et 2 ainsi que la question b) dans le résumé à la fin du questionnaire. La première question préalable est « Définissez ce qu'est une asymptote selon vous. ». Voici les résultats obtenus.

Étudiante 1 : - Asymptote verticale : Là où, pour une valeur de x, la fonction n'existe pas. - Asymptote horizontale : Là où, pour une valeur de y, la fonction n'existe pas.
Étudiant 2 : - Asymptote : Point en x et y qui signifie la limite d'un point d'une fonction

Tableau 3.2: Résultats de la première question préalable

Le premier étudiant semble avoir déjà une bonne idée de ce qu'est une asymptote d'une fonction. Elle ajoutait des détails oralement et gestuellement. Elle dessinait avec son doigt, dans le vide, la courbe, et s'aidait de l'autre main pour expliquer ce qu'était un comportement asymptotique. Elle parlait d'une droite qui n'existe pas, mais que la fonction à tendance à coller. Dans le cas du second étudiant, ce dernier semblait confus avec la matière vue préalablement à cette expérimentation et avait des difficultés à définir l'asymptote selon ses conceptions. À la seconde question préalable, les deux étudiants ont tracé le graphique de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$. Le premier étudiant a même identifié l'équation de cette fonction. Les deux étudiants ont identifié en pointillé les graphiques des asymptotes horizontale et verticale de cette fonction. Le second étudiant semblait solide et était en mesure d'identifier correctement les asymptotes visuellement. Oralement et avec ses gestuelles semblables à l'étudiante, j'ai été en mesure de comprendre qu'il voyait seulement des asymptotes horizontales et verticales pour les fonctions. (Notez qu'il n'y a pas eu de captation vidéo ou audio, ni de transcription, vu la vitesse à laquelle ça s'est passé.) L'étudiante 1, vu ses réponses à la $1^{\text{ière}}$ question préalable, semble du même avis. Ces fausses conceptions seraient sûrement dues par l'enseignement que les étudiants ont eu préablement au niveau du secondaire ou au collégial. Il est à noter que, au Québec, nous ne voyons effectivement pas de fonctions rationnelles avec autre chose que des asymptotes horizontales et verticales avant le collégial. Donc, il est normal que la vision mathématique de ces étudiants soient teintée du bagage académique du secondaire.

Allons voir maintenant à la question b) de la section Résumé du questionnaire qui demande à nouveau une définition d'asymptote, mais après l'expérimentation. Voici les résultats à cette question.

Étudiante 1 : C'est une limite vers laquelle la fonction en question tend.
Étudiant 2 : C'est la limite d'une fonction ou le raprochement à un point.

Tableau 3.3: Résultats de la question b) du résumé

Les réponses, après l'expérimentation avec le laboratoire, sont beaucoup plus claires et précises qu'avant ce dernier. Premièrement, les étudiants, cette fois-ci, ne s'avancent pas sur la nature possible d'une asymptote, ayant vu avec le laboratoire, minimalement, qu'une asymptote peut être horizontale, verticale ou oblique. La fonction pourrait avoir une asymptote curviligne a appris la première étudiante qui a posé les questions justes, à savoir si elle semblait erronée dans son processus cognitif, et est allé tester ses hypothèses avec aide du logiciel. Deuxièmement, on ne traite pas l'asymptote comme étant une endroit où la fonction n'existe pas. On la voit plutôt, après l'expérimentation, comme étant une valeur limite ou un comportement limite selon lequel la fonction s'approche de façon infinitésimale d'une valeur constante.

Suite à ces premiers résultats, on peut dire, autour du concept d'asymptote, que notre question de recherche de base a déjà trouvé une réponse. Selon les résultats précédents et avec aide de notre questionnaire-laboratoire, les étudiants ont amélioré leur compréhension du concept d'asymptote avec aide du logiciel GeoGebra. Ils ont donc, sans l'aide de l'enseignant, participé à une auto-construction de leur apprentissage. La première et la troisième sous-questions sur la visualisation mathématique et sur le passage d'un mode de représentation à un autre ont eu des réponses orales assez claires de la part des étudiants durant le laboratoire. La première étudiante a eu des propos comme quoi l'utilisation du logiciel GeoGebra et d'un questionnaire construit adéquatement peuvent aider à structurer notre pensée, mais surtout de passer de l'abstraction au concret, en favorisant le passage d'un mode de représentation à un autre, c'est-à-dire, en passant par la construction d'une articulation entre représentations (Duval 1993 ; Dufour 2011 ; Drolet 2012). Elle a renchéri en indiquant que le logiciel permet de voir de façon précise des graphiques de fonctions qui ne semblent pas si évidents à tracer. En plus, elle a continué de discuter en évoquant le fait que ce logiciel et le questionnaire permettent d'émettre des hypothèses de recherche en Calcul différentiel tout en permettant de vérifier ses propres conjectures. Le second étudiant a acquiescé timidement.

3.5.2 RÉSULTATS AUTOUR DE L'ACTIVITÉ 1

Continuons maintenant en regardant les résultats provenant de l'activité 1, ou le cas où le degré du numérateur est inférieur au degré de dénominateur. Les étudiants voulaient passer rapidement à une utilisation du logiciel GeoGebra et il fallait les arrêter avant d'être à la question c) où ceux-ci sont invités à son utilisation. On ne voulait pas influencer les réponses en a) et b) par une utilisation immédiate du logiciel.

La première question de cette activité demande à l'étudiant de tracer de quoi a l'air le graphique de la fonction rationnelle d'équation $f(x) = \frac{50}{2x^2}$.

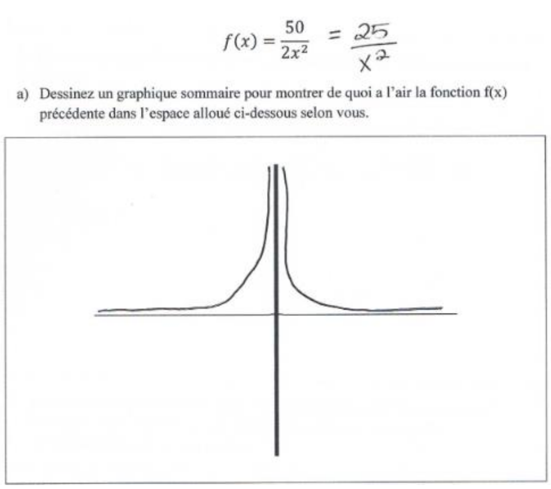


Figure 3.1: Capture de la réponse à l'activité 1a) de l'étudiante 1

La première étudiante a usé de stratégies afin de tracer le graphique de la fonction. Elle a d'abord réduit l'expression. Ensuite, elle a dit oralement que la différence notable entre la fonction rationnelle qu'elle a tracé à la question préalable est l'exposant (ou le degré) qui affecte le dénominateur Elle avait donc une bonne intuition mathématique en se disant que le graphique sera semblable, mais seulement dans la portion positive des quadrants.

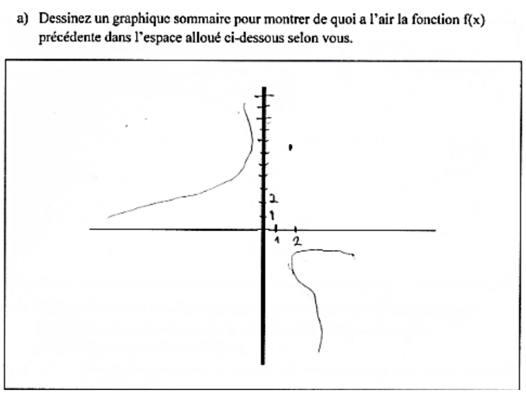


Figure 3.2: Capture de la réponse à l'activité 1a) de l'étudiant 2

Si nous regardons au graphique tracé par l'étudiant 2, nous pouvons observer la première stratégie qu'il a tenté : il voulait graduer les axes et tracer la fonction en ne mettant que quelques points saillants la définissant. Il a rapidement changé d'idée. Il a tourné rapidement les pages pour revenir à la question préalable; il a comparé les équations des fonctions et s'est dit qu'il y avait similitude entre celles-ci. Il a crû que l'exposant deux pouvait faire permuter les courbes de quadrants par rapport au graphique de la fonction de base d'équation $f(x) = \frac{1}{x}$, celle du quadrant 1 irait au quadrant 4 et celle du quadrant 3 irait au quadrant 2.

Passons à la question b) qui demande s'il y a un comportement asymptotique en regardant le graphique de la fonction.

Étudiante 1 : Tend vers 0 quand $y = +\infty$ Tend vers 0 quand $y = -\infty$
Étudiant 2 : Oui, car la formule ressemble à celle d'une fonction rationnelle…

Tableau 3.4: Réponses des étudiants à la question b) de l'activité 1

L'étudiante 1 explique oralement la bonne chose en disant : « Plus x augmente, plus la courbe tend vers 0. Plus x est négatif, plus la courbe tend encore vers 0. » Par contre, à l'écrit, elle a semblé avoir une confusion entre les x (abscisses) et les y (ordonnées). Autre fait intéressant, malgré qu'elle ait dit que l'infini n'est pas un nombre, elle semble avoir une idée de l'infini comme étant une finalité, un nombre réel que l'on pourrait toucher. Elle voit donc l'infini comme un infini potentiel (voir discussion dans le 1er chapitre). Elle m'a expliqué qu'elle pensait à l'asymptote verticale quand elle a écrit sa réponse. L'étudiant 2 ne se contente que d'une vague comparaison avec la fonction rationnelle de base d'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ et ne pousse pas l'analyse plus loin ; on pourrait dire qu'il montre une réticence à la visualisation dans le sens de Eisenberg et Drayfus (1991).

Une fois en GeoGebra (question c)), l'étudiante 1 est contente, car elle ne s'est pas trompée dans son tracé de courbe. L'étudiant 2 semble confus et indique que tout le graphique se retrouve dans la portion positive des axes sans trop comprendre pourquoi, mais indique à voix haute son incompréhension. Malgré les indications de faire la première portion des exercices seul, l'étudiante 1 indique de regarder à l'exposant au dénominateur et de voir si un nombre négatif est possible. L'étudiant 2 semble mieux comprendre la courbure de la courbe et son emplacement. Après visionnement du graphique, on veut voir si la fonction semble suivre une tendance si l'abscisse augmente infiniment.

Étudiante 1 : Quand x tend vers $+\infty$, y tend vers 0. Quand x tend vers $-\infty$, y tend vers 0.
Étudiant 2 : Elle se rapproche de y=0 sans jamais y toucher.

Tableau 3.5: Réponses des étudiants à la question d) de l'activité 1

L'étudiante 1 semble avoir corrigé sa vision de l'asymptote horizontale, avec la visualisation avec le logiciel, contrairement à la question b). La réponse est exacte. Dans le cas de l'étudiant 2, la réponse est exacte, mais ne fait aucunement mention de tendance ou de limite. Par compte, dans les deux cas, les étudiants semblent maintenant avoir changé leur vision de l'infini en un infini actuel alors qu'ils en parlaient en des termes d'infini potentiel. Comme dit à la section 1.5, il est difficile, voire impossible de tenir un discours sur l'infini actuel en mots.

Dans les deux cas, les étudiants ont modifié l'échelle des axes des abscisses et des ordonnées. Ils ont également bougé ou modifié la fenêtre du graphique. Ainsi, ils avaient un meilleur aperçu graphique de la fonction et de ses variations.

	Étudiante 1	Étudiant 2
Question f)	$g(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \frac{25}{x}$
Question g)	Parce que c'est une fonction de base vue au secondaire.	Parce qu'elle a un comportement semblable.

Tableau 3.6: Réponses des étudiants aux questions f) et g) de l'activité 1

Le choix de l'étudiante 1 est évident, car elle a fait référence à la réponse qu'elle a donné à la question préalable 2. Selon elle, les deux fonctions semblent avoir la même asymptote. Le choix de l'étudiant 2 n'est pas supporté par une argumentation forte; ce n'est qu'une question de bon sens à ses yeux. Oralement, il a fait part que de la fonction de base de l'activité, nous pouvons réduire les facteurs numériques et sûrement en descendre le degré de 1 au dénominateur pour obtenir une fonction avec un graphique similaire.

Nous sommes rendus à analyser la question h) de l'activité 1. Cette dernière demande de calculer $h(x) = f(x) - g(x)$, où $f(x)$ est la fonction de base de l'activité et $g(x)$ est la fonction choisie judicieusement par l'étudiant.

Étudiante 1 : $$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$$
Étudiant 2 : 0 est le résultat donc vers + l'infini, les points se rapprochent de $y = 0$.

Tableau 3.7: Réponses des étudiants à la question h) de l'activité 1

L'étudiante 1 a une bonne réponse et explique même celle-ci oralement. Elle indique, avec questionnement ciblé du chercheur sur les degrés des numérateur et dénominateur d'une fonction, que la fonction h(x) symbolise la différence en une abscisse entre les deux fonctions (vision géométrique). Elle termine en disant que, si cette fonction a une limite à l'infini de 0, cela signifierait que les deux fonctions f(x) et g(x) auraient la même limite à l'infini en tant que tel. L'étudiant 2 a une belle vision des fonctions f(x) et g(x), mais il semble incapable de verbaliser sur la signification de la fonction h(x) ou de sa nature. Il semble incapable à dénoter ce que signifie ce résultat de limite à l'infini égalant 0.

À la question i), les deux étudiants ont indiqué :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{50}{2x^2} = 0$$

Ils ont dit oralement que la fonction h(x) n'a pas été si utile que ça. En fait, bouger le graphique des fonctions f(x) et g(x) (modifier la fenêtre d'observation) ainsi que de modifier les échelles sur les axes ont été deux actions plus bénéfiques à leurs yeux pour faciliter leur apprentissage des limites à l'infini dans ce cas précis. C'est à partir de leurs observations avec aide du logiciel qu'ils en sont venus à cette conclusion mutuellement.

En k), comme conclusion à cette partie, on a demandé aux étudiants de tenter de faire ressortir ce qu'il y a de spécial dans le cadre de cette activité et de tester, avec le logiciel leur hypothèse ou conjecture.

Étudiante 1 : Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, la limite à l'infini tend vers 0.
Étudiant 2 : Si le « x » du dénominateur a une puissance plus élevée que celui du numérateur, pour un infini positif, la limite tendra vers 0.

Tableau 3.8: Réponses des étudiants à la question k) de l'activité 1

Tout d'abord, l'étudiante 1 a une bonne hypothèse relativement précise sur le processus. Elle a testé, avec deux exemples de son choix, sa conjecture et est restée avec la même impression. Elle n'a pas changé sa réponse après usage de GeoGebra.

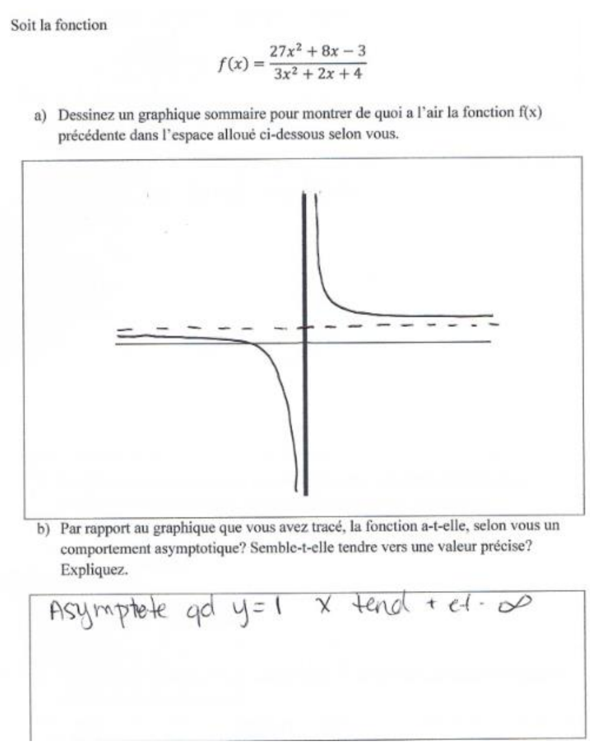
L'étudiant 2 est arrivé à une réponse semblable, mais s'est plutôt soucié du degré du dénominateur en premier avant d'en venir au numérateur. Il a utilisé le terme « puissance de x » au lieu de parler du degré du monôme ou du polynôme. Il n'a pas utilisé GeoGebra pour vérifier sa réponse ou son hypothèse.

3.5.3 RÉSULTATS AUTOUR DE L'ACTIVITÉ 2

Regardons maintenant les résultats que nous avons recueillis pour ce qui est de l'activité 2, ou le cas où les degrés du numérateur et du dénominateur sont les mêmes. Les étudiants ont déjà certaines appréhensions, car l'équation de cette fonction est semblable à celle utilisée lors de l’activité 1. Encore une fois, il fallait arrêter les étudiants d’utiliser le logiciel GeoGebra pour qu’ils répondent sans biais aux questions a) et b) de cette section.

Pour l’activité 2, commençons par regarder les questions a) et b) ne nécessitant pas l’utilisation de l’informatique. L’étudiant 2 n’a pas voulu se mouiller et n’a pas voulu tracer un graphique pour cette section. Il semblait confus et ne savait pas quoi dessiner. De plus, aucun commentaire n’a été émis en b) sur le possible comportement asymptotique de la courbe du graphique de la fonction. Peut-être qu’il n’avait pas vu de courbes de ce type (rationnelles polynomiales) avant l’expérimentation…

L’étudiante 1 nous a fourni du beau matériel pour discuter dans cette analyse. Elle a répondu de façon assez complète aux questions a) et b) de l’activité 2 (voir figure 3.3).


Soit la fonction

$$f(x) = \frac{27x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2x + 4}$$

a) Dessinez un graphique sommaire pour montrer de quoi a l’air la fonction f(x) précédente dans l’espace alloué ci-dessous selon vous.

b) Par rapport au graphique que vous avez tracé, la fonction a-t-elle, selon vous un comportement asymptotique? Semble-t-elle tendre vers une valeur précise? Expliquez.

Asymptote qd $y=1$ x tend $+$ et $-\infty$

Figure 3.3: Réponses de l'étudiante 1 aux questions a) et b) de l'activité 2

L'étudiante 1 a tracé le graphique d'une fonction rationnelle polynomiale, quoi que très près de la réalité par rapport à la fonction f(x). Elle a, en plus, tracé, en pointillés, l'asymptote horizontale de la fonction. Par contre, oralement, elle a dit que l'équation de cette asymptote serait $y = 1$. Lorsque j'ai demandé pourquoi, elle m'a dit que « -3+4=1 ». Elle n'était pas très loin de la vérité par rapport à l'apparence graphique, mais l'asymptote n'est bien sûr pas la bonne.

À la question b), l'étudiante a spécifié qu'il y a une asymptote quand $y = 1$. Alors, x tendra vers $-\infty$ et $+\infty$. Elle semble bien comprendre la notion d'asymptote et de limite selon ses dires. Sa vision de l'infini est encore celle d'un infini potentiel que tu ne peux pas atteindre et c'est bien ainsi. Une fois sur GeoGebra, les deux étudiants ont avoué ne pas voir le graphique entier de la fonction.

Les deux étudiants ont modifié la fenêtre graphique et les échelles de graduation (question e)) avant de répondre à la question d). Ils ont aussi utilisé les agrandissements de GeoGebra.

À la question d), on demande aux étudiants si la fonction f(x) semble suivre une certaine tendance lorsque l'abscisse augmente infiniment.

Étudiante 1 : $y = 1$; x tend vers infini
Étudiant 2 : oui, elle semble s'approcher de $y = 9$.

Tableau 3.9: Réponses des étudiants à la question d) de l'activité 2

L'étudiante 1 semble s'accrocher au fait que la fonction aurait une asymptote en $y = 1$. Par contre, après modification flagrante en GeoGebra, elle a changé d'idée oralement en me spécifiant que l'asymptote serait en $y = 9$, mais elle semblait perplexe ou songeuse. L'étudiant 2, suite aux modifications qu'il a apportées à son fichier, semblait confiant que l'asymptote se situait en $y = 9$. Le même étudiant a utilisé des points mobiles le long de la courbe pour vérifier ses hypothèses de travail.

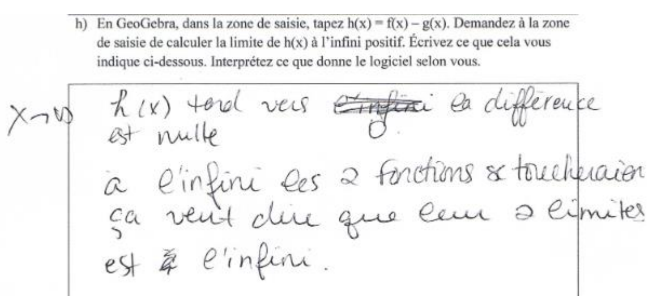
Ce qui est accrochant ici est le fait que les étudiants ont déjà associé les mots tendance, limite et asymptote tout en les distinguant assez bien. A ce point, nous pouvons dire, qu'un processus de visualisation mathématique (dans le sens de Zimmermann et Cunningham 1991) a été provoqué par l'organisation de la tâche et par l'outil GeoGebra.

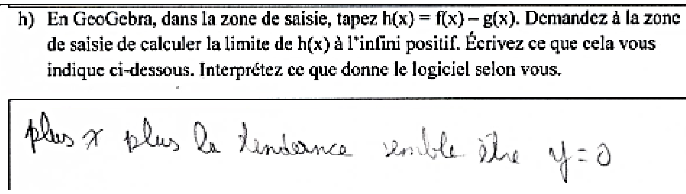
Étonnament, les deux étudiants ont choisi la même courbe g(x) qui aurait un comportement semblable à la fonction f(x) à l'étude : ils ont opté pour la courbe d'équation $y = 9$.

À la question g), on demandait pourquoi avoir fait ce choix de fonction g(x). Voici leurs réponses. C'est un peu étonnant de les voir utiliser l'équation de l'asymptote comme étant une autre fonction à part entière. C'était une bonne idée et c'est ce à quoi je m'attendais.

Étudiante 1 : Je voulais vérifier mon choix d'asymptote.
Étudiant 2 : Parce que c'est la tendance de la fonction.

Tableau 3.10: Réponses des étudiants à la question g) de l'activité 2

<table>
<tr><td>Étudiante 1 :

h) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Demandez à la zone de saisie de calculer la limite de h(x) à l'infini positif. Écrivez ce que cela vous indique ci-dessous. Interprétez ce que donne le logiciel selon vous.
X→∞ h(x) tend vers ~~l'infini~~ 0. la différence est nulle
à l'infini les 2 fonctions se toucheraient
ça veut dire que leur 2 limites
est à l'infini.</td></tr>
<tr><td>Étudiant 2 :</td></tr>
</table>


h) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Demandez à la zone de saisie de calculer la limite de h(x) à l'infini positif. Écrivez ce que cela vous indique ci-dessous. Interprétez ce que donne le logiciel selon vous.

plus x plus la tendance semble être y = 0

Tableau 3.11: Réponses des étudiants à la question h) de l'activité 2

Le résultat donné par l'étudiante 1 est sympathique. Elle nous indique que lorsque l'abscisse croît infiniment, la fonction h(x) tend vers 0. Elle ajoute que cette fonction représente la différence entre les fonctions f(x) et g(x) et que celle-ci s'avère nulle. Selon elle, à l'infini, les deux fonctions se toucheront. Cela signifie que leurs limites à l'infini positif respectives seraient la même. J'indique que le résultat est sympathique ici, car l'étudiante semble bien comprendre la nature de la fonction h(x). Par contre, elle change son idée par rapport à la nature de l'infini et le prend comme un nombre réel maintenant, car elle pourrait l'atteindre, et cela est erroné.

Elle avouera en i) que $\lim_{x\to\infty} \frac{27x^2+8x-3}{3x^2+2x+4} = 9$ selon ses appréhensions, ses hypothèses de base et une compréhension du laboratoire élevée.

L'étudiant 2 a expliqué que, plus x augmente en valeur, plus la fonction h(x) semble avoir une tendance vers $y = 0$. Par contre, il ne se questionne aucunement sur la nature de la fonction h(x) par rapport aux questions f(x) et g(x) précédemment exposées. Il conclut tout de même que $\lim_{x\to\infty} \frac{27x^2+8x-3}{3x^2+2x+4} = 9$, mais en ne se basant que sur ses observations lors du laboratoire. C'est dommage, car la visualisation a ses limites et l'étudiant pourrait passer à côté de quelque chose s'il ne fait pas attention au niveau d'agrandissement ou de modification des échelles de graduation sur les axes.

	Étudiante 1	Étudiant 2

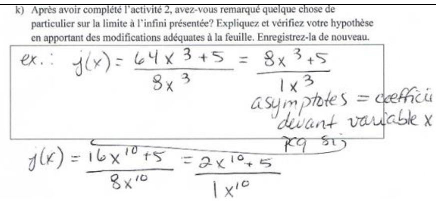
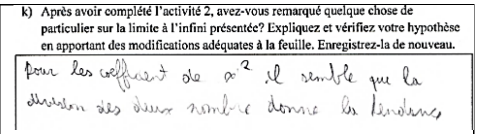
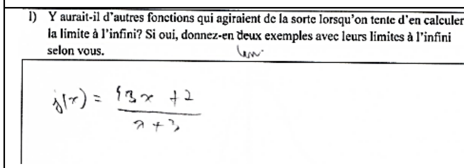
Question k)	 k) Après avoir complété l'activité 2, avez-vous remarqué quelque chose de particulier sur la limite à l'infini présentée? Expliquez et vérifiez votre hypothèse en apportant des modifications adéquates à la feuille. Enregistrez-la de nouveau. ex. : $j(x) = \frac{64x^3+5}{8x^3} = \frac{8x^3+5}{1x^3}$ asymptotes = coefficient devant variable x $j(x) = \frac{16x^{10}+5}{8x^{10}} = \frac{2x^{10}+5}{1x^{10}}$	 k) Après avoir complété l'activité 2, avez-vous remarqué quelque chose de particulier sur la limite à l'infini présentée? Expliquez et vérifiez votre hypothèse en apportant des modifications adéquates à la feuille. Enregistrez-la de nouveau. Pour les coefficient de x^2 il semble que la division des deux nombre donne la tendance
Question l)		 l) Y aurait-il d'autres fonctions qui agiraient de la sorte lorsqu'on tente d'en calculer la limite à l'infini? Si oui, donnez-en deux exemples avec leurs limites à l'infini selon vous. $j(x) = \frac{13x+2}{x+3}$

Tableau 3.12: Réponses des étudiants aux questions k) et l) de l'activité 2

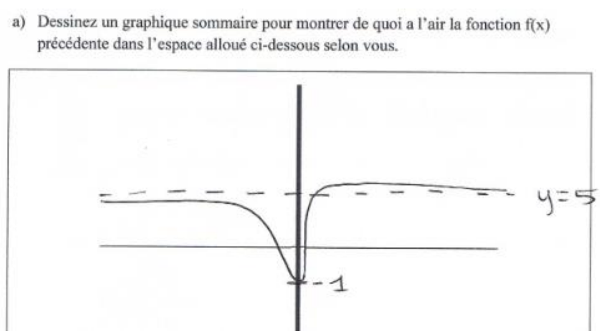
L'étudiante 1 a été en mesure de formuler son hypothèse qui consiste à affirmer que les asymptotes seront composées par les coefficients devant la variable x. Par contre, elle précise son propos tout de suite avec deux exemples de fonctions suivant le même concept : $j(x) = \frac{64x^3+5}{8x^3}$ et $j(x) = \frac{16x^{10}+5}{1x^{10}}$. Elle vérifie tout de suite avec GeoGebra ses hypothèses et semble fière d'elle d'avoir trouvé la bonne réponse. Par contre, les termes mathématiques devraient être mieux choisis, mais le concept mathématique semble bien acquis dans ce cas-ci sauf qu'elle ne parle aucunement des degrés du numérateur et du dénominateur dans ce cas précis, ni de division du numérateur par le dénominateur. Elle aura donc répondu aux questions k) et l) simultanément.

L'étudiant 2, quant à lui, a indiqué que pour les coefficients de x^2, il semble que la division des deux nombres donne la tendance. J'ai été un peu surpris de sa réponse sur le coup puisqu'il ne semblait pas comprendre et semblait confus. Au fur et à mesure dans le laboratoire, il semblait alors prendre confiance en lui. Il n'est pas totalement erroné, mais il devrait parler plutôt des degrés du numérateur et du dénominateur. Contrairement à l'étudiante 1, il a parlé de la division des deux membres de cette fonction rationnelle polynomiale. Il a donc mieux compris ici. Il a indiqué une fonction comme exemple de fonction suivant une tendance similaire : $f(x) = \frac{13x+2}{x+3}$. Il a indiqué oralement que cette fonction semble avoir une limite à l'infini de 13. Avec GeoGebra, il a vérifié de façon aisée que sa limite était bien la bonne. Il était fier de sa réponse et surtout du fait qu'il a vérifié sa conjecture par lui-même avec un outil. Les deux étudiants ont bien compris le but de l'expérimentation à l'activité 2 selon les résultats obtenus.

3.5.4 RÉSULTATS AUTOUR DE L'ACTIVITÉ 3

Pour la troisième activité (Activité 3), procédons à un retour sur les résultats obtenus. Dans cette troisième activité, on regardait le comportement d'une fonction rationnelle polynomiale où le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur. Les étudiants souhaitaient utiliser le logiciel avant de répondre aux questions a) et b). Une intervention rapide du chercheur était encore de mise pour éviter l'utilisation du logiciel avant qu'on en fasse réquisition à l'étudiant. Cette activité porte sur la fonction d'équation $f(x) = \frac{15x^3+8x-3}{3x^2+2x+4}$.

La question a) porte sur le traçage de la fonction f(x) selon les pensées de l'étudiant.

<table>
<tr><td>Étudiante 1 :

</td></tr>
<tr><td>Étudiant 2 :</td></tr>
</table>

a) Dessinez un graphique sommaire pour montrer de quoi a l'air la fonction f(x) précédente dans l'espace alloué ci-dessous selon vous.

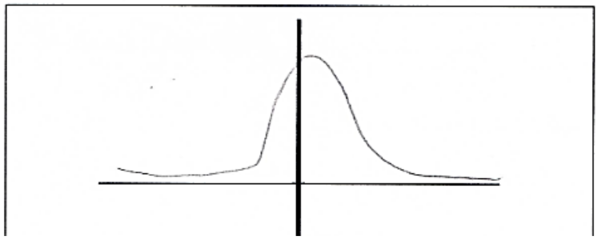


Tableau 3.13: Réponses des étudiants à la question a) de l'activité 3

Le schéma offert par l'étudiante 1 indique qu'elle croit que la fonction a une asymptote en $y = 5$, car elle divisait encore les coefficients cotoyant la variable avec le plus haut exposant au numérateur et au dénominateur. Elle a mal lu les exposants et a crû qu'ils étaient identiques. Après coup, elle a dit oralement qu'elle s'est trompée vu son erreur de lecture. Elle ne savait pas pourquoi le sommet de la courbe serait en (0, -1), mais elle a tenté le coup.

Le graphique de l'étudiant 2 ressemble étrangement à celui de la courbe normale. Il ne savait pas vraiment quoi dessiner, mais croyait qu'il y allait avoir encore une asymptote horizontale pour ce graphique.

Pour les raisons nommées précédemment, l'étudiante 1 croyait que l'asymptote allait être horizontale et d'équation $y = 5$ dans le cas de la fonction f(x). Elle a dit s'être trompée après relecture du problème. Pour être conséquent avec ce qu'il a tracé, l'étudiant 2 croit que l'asymptote de la fonction f(x) est d'équation $y = 0$. La fonction f(x) aurait donc une asymptote horizontale selon eux et la fonction aurait alors un comportement asymptotique.

Disons que les étudiants furent relativement surpris lors du traçage de la fonction en GeoGebra. Ils ont avoué à la question c) que « Toute » était différent de ce qu'ils avaient prévu.

Après avoir modifié les échelles de graduation et la fenêtre du graphique, voici les réponses aux questions d) et e).

	Étudiante 1	Étudiant 2
Question d)	Ça suit une droite oblique dans les 2 sens.	Je crois que oui.
Question e)	Même idée	Ça semble suivre une ligne (oblique).

Tableau 3.14: Réponses des étudiants aux questions d) et e) à l'activité 3

Après regard sur le graphique de la fonction f(x) sur GeoGebra, les étudiants arrivent au même constat: il y aurait une asymptote oblique ou la fonction aurait une tendance suivant une droite. Lorsqu'ils cherchent une fonction suivant la même tendance, ils ne divisent que les termes les plus imposants et obtiennent alors une asymptote d'équation $g(x) = 5x$. Cela s'avère faux, mais les étudiants ne le savent pas encore.

À la question g), on demande aux étudiants d'expliquer leur choix de fonction g(x). Voici les réponses obtenues.

Étudiante 1 : Car le degré de l'exposant du numérate est supérieur au dénominateur.
Étudiant 2 :

Parce que j'ai divisé le premier numérateur au premier dénominateur

Tableau 3.15: Réponses des étudiants à la question g) de l'activité 3

L'étudiante 1 a saisi qu'il était question des degrés au numérateur et au dénominateur de la fonction rationnelle polynomiale, mais n'en sait pas plus actuellement. Pour ce qui est de l'étudiant 2, il a juste voulu appliquer de nouveau la technique utilisée à l'activité 2 sans trop se questionner sur le pourquoi c'est comme ça.

Selon eux, la fonction h(x), ou différence entre f(x) et g(x) devrait avoir une limite à l'infini tendant vers 0, car $g(x) = 5x$ était l'asymptote selon eux. Ils ont alors, avec un léger biais de ma part en spécifiant que c'était de leur faute ou de la faute du logiciel et qu'il fallait être critique par rapport à l'utilisation des logiciels-outils, écrit que le logiciel était détraqué. On sait que c'est faux et qu'ils n'ont juste pas fait la division polynomiale comme il faut entre le numérateur et le dénominateur de f(x). Par contre, ils sont en découverte et corrigeront les fausses conceptions après la collaboration entre les pairs, le devoir individualisé ou l'institutionnalisation de l'enseignant (retour sur les connaissances mis en jeu dans le laboratoire).

Les deux étudiants sont d'accord à la question i). Ils indiquent que : $\lim_{x\to\infty} \frac{15x^3+8x-3}{3x^2+2x+4} = \infty$. J'ai trouvé curieux que l'étudiante 1 m'interpelle et indique oralement que c'est pas normal d'écrire un symbole d'égalité à côté du signe d'infini, car ce n'est pas un nombre réel en tant que tel. Elle est inconsistante entre ses réponses selon les activités. Par contre, je suis content de son intervention que j'ai trouvée opportune à ce moment de l'expérimentation. Le signe d'égalité à été étudié comme un obstacle épistémologique que même des enseignants de mathématique ont ce type d'obstacle selon les résultats de Paez (2005) et Hitt (2008). Les deux étudiants se sont laissés convaincre par la visualisation mathématique de la fonction f(x) pour déterminer la limite à l'infini de cette fonction correcte. Encore une fois, les étudiants ont modifié la fenêtre graphique et les échelles de graduation du graphique de cette fonction. Nous ne regarderons pas aux questions j) et k), car elles ont subi un certain biais de ma part. On n'étudiera pas la fonction h(x) pour l'activité 3.

À la question l), on demande aux étudiants de déterminer si le graphique de la fonction f(x) a un comportement asymptotique. L'étudiante 1 indique : « Oui, car elle suit une ligne. ». L'étudiant 2 indique que « la limite semble être 5x, car elle se rapproche de cette droite sans y toucher ». Une erreur conceptuelle fait irruption ici de la part de l'étudiant 2. Une limite peut converger vers une valeur numérique ou diverger vers l'infini positif ou négatif. Pour l'étudiant 2, la limite semble être une fonction. Pour la question m), les étudiants ont tenté de ressortir une conclusion de l'activité 3 sur l'étude de la fonction f(x) qui est rationnelle polynomiale avec un degré supérieur au numérateur contrairement au dénominateur. Voici leurs réponses dans un tableau (voir figure 3.16). L'étudiante 1 a été plus générale dans son commentaire alors que l'étudiant 2 s'est limité au cas à l'étude dans le cadre de l'activité 3.

Étudiante 1 :	Degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, la limite tend vers ∞.
Étudiant 2 :	Tend vers l'infini et a un comportement asymptotique

Tableau 3.16: Réponses des étudiants à la question m) de l'activité 3

L'étudiante 1 a vraiment déterminé qu'il était question des degrés du numérateur et du dénominateur des fonctions polynomiales rationnelles dans le cadre des trois activités. Elle a dit oralement que si le numérateur est plus imposant, le nombre final sera toujours de plus en plus grand. Or, c'est pour cette raison que le résultat frôlera avec l'infini lorsque x augmente infiniment. L'étudiant 2 indique que la fonction tend vers l'infini (ou diverge vers le haut, selon ses dires), et qu'elle a un comportement asymptotique nécessairement. Dans les deux cas, leurs observations sont bonnes, mais leur point de vue diffère. C'est très intéressant, mais ils n'ont encore rien partagé.

On demande maintenant à la question n) s'il en serait ainsi pour d'autres fonctions et, à la question o), de donner des exemples de fonctions suivant la même tendance que la fonction f(x) de départ pour cette activité.

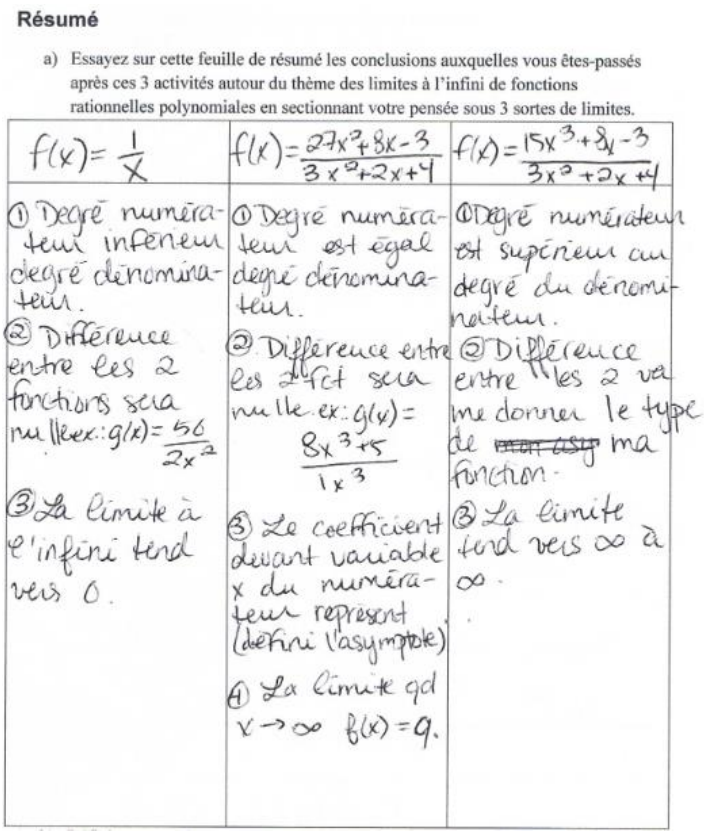
	Étudiante 1	Étudiant 2
Question n)	À l'écrit, « Parce qu'il y a une droite oblique dans les 2 cas. » À l'oral, « Il y a une différence positive entre le degré du numérateur et du dénominateur. Pour ça, il y aurait une asymptote oblique. »	Sans réponse à l'écrit. À l'oral, « Le numérateur a un degré de plus que celui du dénominateur. »
Question o)	$j(x) = \frac{30x^4 + 8x + 3}{10x^3 + 2x + 4}$	$y = \frac{9x^3 + 8x - 3}{3x^2 + 2x + 4}$

Tableau 3.17: Réponses des étudiants aux questions n) et o) pour l'activité 3

À la question n), les étudiants semblent d'accord sur le fait que d'autres fonctions pourraient avoir des asymptotes obliques, de façon similaire à la fonction f(x) à l'étude. Ils voient bien que c'est le cas lorsqu'il y a une différence de 1 degré entre le numérateur et le dénominateur d'une fonction polynomiale rationnelle. Pour la question o), l'étudiante 1 a donné une bonne équation. L'étudiant 2 aurait dû écrire la fonction comme *j(x)* (j en fonction de x) au lieu d'utiliser *y*. Dans les deux cas, les étudiants se sont limités à une différence de 1 degré pour créer ainsi une asymptote oblique.

3.5.5 ÉTUDE DU RÉSUMÉ

Le résumé n'a pas été fait par l'étudiant 2, car il ne voyait pas explicitement comment procéder pour le faire. Par contre, l'étudiante 1 l'a produit. Elle a bien vu les différences entre les trois activités en termes de la différence des degrés, la fonction h(x) utilisée et la limite à l'infinie de la fonction f(x).



Résumé

a) Essayez sur cette feuille de résumé les conclusions auxquelles vous êtes-passés après ces 3 activités autour du thème des limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales en sectionnant votre pensée sous 3 sortes de limites.

$f(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\frac{27x^2+8x-3}{3x^2+2x+4}$	$f(x)=\frac{15x^3+8x-3}{3x^2+2x+4}$
① Degré numérateur inferieur degré dénominateur. ② Différence entre les 2 fonctions sera nulle ex: $g(x)=\frac{56}{2x^2}$ ③ La limite à l'infini tend vers 0.	① Degré numérateur est égal degré dénominateur. ② Différence entre les 2 fct sera nulle ex: $g(x)=\frac{8x^3+5}{1x^3}$ ③ Le coefficient devant variable x du numérateur représent (défini l'asymptote) ④ La limite qd $x\to\infty$ $f(x)=9$.	① Degré numérateur est supérieur au degré du dénominateur. ② Différence entre les 2 va me donner le type de ~~mon asy~~ ma fonction. ③ La limite tend vers ∞ à ∞.

Figure 3.4: Tableau résumé provenant de l'étudiante 1

L'étudiante a bien vu les différences des degrés entre les numérateurs et dénominateurs des fonctions f(x) lors des trois activités. C'est noté tel quel. Le dernier point du tableau indique que :

- Si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, la limite lorsque x tend vers l'infini sera de 0.
- Si le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, la limite lorsque x tend vers l'infini sera égale à une constante constituée des coefficients devant la variable avec le plus haut exposant (plus haut degré).

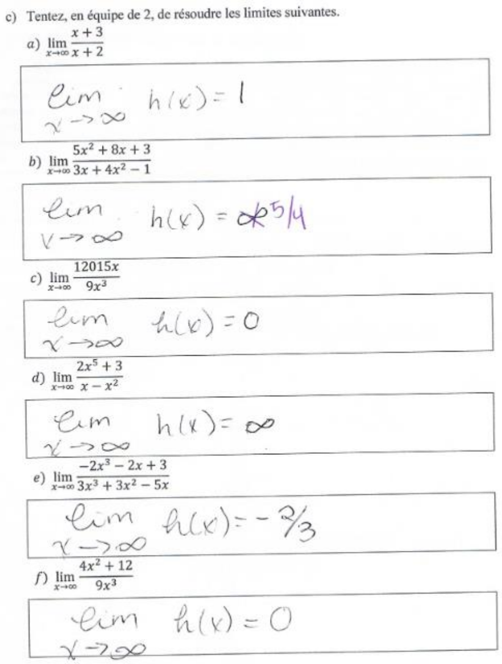
- Si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, la limite lorsque x tend vers l'infini sera infinie. (Elle divergera.)

L'étudiante est donc exacte dans ses hypothèses puisqu'elle a pris le temps de les tester, avec aide du logiciel GeoGebra, pendant que l'étudiant terminait les trois activités (1, 2 et 3).

Le deuxième point concernant la différence entre les fonctions f(x) et g(x) est vrai dans les deux premiers cas à l'étude (degré du numérateur inférieur ou égal au dénominateur). Dans le troisième cas (degré du numérateur supérieur au dénominateur), la différence entre les deux fonctions (f(x) et g(x)) ne donnera pas le type de fonction « asymptote ». C'est faux, il s'agit plutôt de la différence entre les degrés des numérateurs et dénominateurs qui exprimera le degré de l'asymptote. Par exemple, si la différence est de 1, l'asymptote sera affine. Si la différence est de 2, l'asymtote sera quadratique.

3.5.6 RETOUR SUR L'ACTIVITÉ COLLECTIVE

Voici les réponses des deux étudiants à la suite.



c) Tentez, en équipe de 2, de résoudre les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{x+2}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 1$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 8x + 3}{3x + 4x^2 - 1}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = \cancel{\infty}\, 5/4$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{12015x}{9x^3}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 + 3}{x - x^2}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$

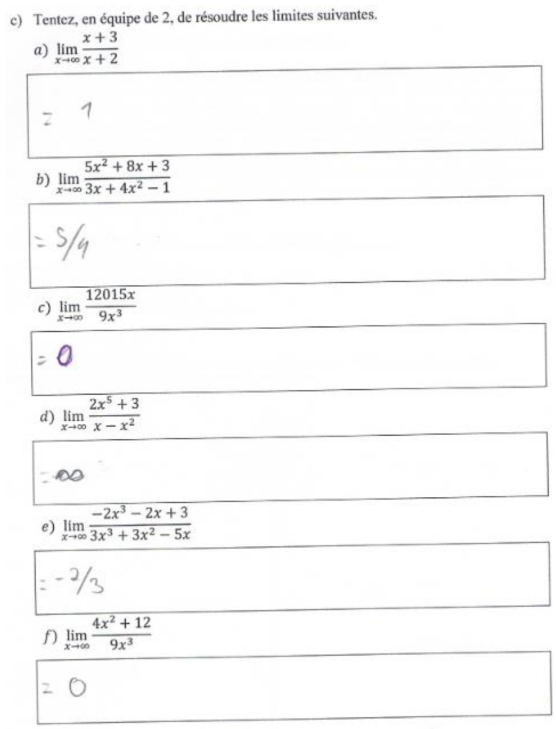
e) $\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = -2/3$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 12}{9x^3}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$

Figure 3.5: Réponses à l'activité collective de l'étudiante 1


c) Tentez, en équipe de 2, de résoudre les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{x+2}$

$= 1$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x+3}{3x+4x^2-1}$

$= 5/4$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{12015x}{9x^3}$

$= 0$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5+3}{x-x^2}$

$= \infty$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

$= -2/3$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2+12}{9x^3}$

$= 0$

Figure 3.6: Réponses à l'activité collective de l'étudiant 2

Les deux étudiants ont bien collaboré et compris le contenu théorique de l’expérimentation. La preuve en est du peu d’erreurs dans ces exercices de révision collectifs. L’erreur de l’étudiante à la question b) est causée par le fait qu’elle a lu trop vite et n’a pas vu que le degré est le même au numérateur et au dénominateur. L’erreur de l’étudiant à la question c) est causé par un moment d’égarement selon l’étudiant. Il n’avait pas compris le 1ier cas de figure de l’expérimentation. En résumé, ils avaient tous deux compris les trois cas de figure à la fin de l’activité collective.

Il me restait, comme enseignant, 30 minutes au cours. Je suis alors passé à une institutionnalisation rapide (explications des différents cas étudiés de limites à l’infini et comment les résoudre mathématiquement) avant la fin du cours en leur laissant un devoir pour la suite des choses. Ils l’ont remis et les réponses sont bonnes à tout coup dans le cadre de ce léger devoir qui était constitué d’exercices pratiques dans le manuel scolaire utilisé dans le cadre du cours, celui de Brunelle et Désautels, au chapitre 2. Les questions demandées étaient les numéros 1, 2a, 4a et 4b en page 90 ainsi que les numéros 1a, 1b, 1e et 2 en page 111. La première série de questions porte sur les limites à l'infini de fonctions polynomiales ratiionnelles et l'autre, sur les asymptotes et le calcul de limites afférent à ce phénomène.

CHAPITRE IV- CONCLUSIONS

4.1 INTRODUCTION

Dans le cadre de ce dernier chapitre, nous tenterons de ressortir les points importants de réflexion qui peuvent être émis après l'analyse des résultats. Nous essaierons de trouver ce qui a moins bien fonctionné dans le cadre de cette expérimentation et lors de l'analyse afin de perfectionner cette activité et la rendre plus parlante du côté chercheur et plus fonctionnelle du côté enseignant. Par la suite, nous élaborerons un peu sur les considérations à garder en tête si un chercheur voulait entreprendre une recherche expérimentale du même type.

4.2 CE QUE L'ANALYSE DE RÉSULTATS MONTRE

Tout d'abord, notre questionnaire de recherche nous a permis, avec une utilisation efficace du logiciel GeoGebra, que les étudiants passent à une auto-construction d'un nouveau savoir autour du concept d'asymptote tout en procédant à une modification de fausses croyances sur ce concept en cours de route. Les étudiants semblaient avoir un plaisir contagieux à utiliser le logiciel pour effectuer la tâche, tâche non routinière à mes yeux (sous l'idée de Seldon et Selden (Selden, Mason and Selden, 1989)). De mon point de vue d'enseignant, une tâche de ce type et selon la méthode ACODESA ne fut jamais expérimentée avec mes étudiants auparavant. C'est pourquoi l'expérimentation a été difficile au départ, mais les résultats bons ensuite. Déjà là, créer une motivation pour l'apprentissage en Calcul 1 n'est pas tâche facile (voir p.e. Eisenberg et Dreyfus 1991); certains enseignants d'expérience peuvent en témoigner. GeoGebra est vu, par les étudiants comme étant un outil vivant facilitant la visualisation mathématique, l'émission d'hypothèses et la vérification par soi-même de ses conjectures (selon le sens de Zimmermann & Cunningham 1991). De plus, selon les étudiants de l’échantillon-test, le logiciel permet un passage aisé d’un mode de représentation à un autre et ceux-ci semblaient apprécier les fonctionnalités le permettant. Les étudiants passaient généralement du mode graphique au mode algébrique en passant parfois par le mode symbolique. Ils ont utilisé généralement les outils disponibles d’agrandissement et de déplacement de la zone graphique.

Ensuite, suite à l’activité 1, les étudiants étaient sensiblement d’un avis similaire en ce qui a trait à la limite à l’infini de fonctions polynomiales rationnelles où le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. Il y eut un apprentissage par essais et erreurs dans le cas de l’étudiante 1 qui ne semblait pas certaine de son hypothèse en fin d’activité. Après 2 exemples de sa part, elle était convaincue de sa conjecture. Pour ce qui est de l’étudiant 2, il semblait perplexe, mais n’a pas voulu tester avec le logiciel ses réponses. On dirait que mes préjugés par lesquels les hommes seraient plus intéressés par l’informatique et que la visualisation mathématique, avec aide du logiciel, serait plus aidante chez les hommes semblent toutes deux être fausses dans le cadre de cette expérimentation. Par contre, on ne se fie que sur un échantillon de 2 personnes pour le dire. Cette expérimentation devrait être répétée sur un échantillon plus grand et ayant moitié filles, moitié garçons. Aussi, il est important de prévoir plus de temps pour habituer les élèves à la méthodologie ACODESA.

De l’activité 2, on peut déjà déterminer que les étudiants apprécient les différentes options pour passer d’un mode de représentation à un autre pour tester leurs hypothèses (dans le sens de Duval, 1993) en calcul différentiel dans notre activité. Ils optent même pour des solutions auxquelles je ne m’attendais pas vu leur simplicité (point mobile sur la courbe entre autres). Les étudiants comprennent avec le laboratoire la matière qui y est introduite de façon incidieuse. Ils utilisent les options du logiciel pour émettre des hypothèses ou conjectures et se vérifier avec un certain niveau de certitude à leurs yeux. Il manque un peu le niveau de critique des technologies, mais ce n'est pas le but de l'opération ici.

Parlant des critiques sur le logiciel, au lieu de se questionner lors de l'activité 3, ils ont mis des erreurs conceptuelles sur le dos de l'outil informatique GeoGebra. C'est tout de même intéressant.

4.3 L'APPORT DE LA MÉTHODOLOGIE ACODESA ET DE LA TECHNOLOGIE DANS LA RECHERCHE

Je produisais rarement des activités coopératives en classe de mathématiques avant cette recherche. Je ne voyais pas vraiment l'apport du travail d'équipe, ni de l'apport de la technologie en classe. Suite aux conférences de Monsieur Fernando Hitt sur le sujet durant les cours à la maîtrise, j'ai compris que la méthode ACODESA a fait ses preuves et qu'elle est efficace en classe de mathématiques. Il a aussi insisté sur le cheminement entre le papier-crayon et la technologie. Les discussions avec lui m'ont fait cheminer par rapport à ma vision du travail d'équipe et de la technologie.

Tout d'abord, le travail individuel de réflexion sur quelque chose que les étudiants n'ont jamais vu ni jamais étudié est aussi un travail d'exploration et de découverte. Cela prend du temps, donc il faut en allouer suffisament aux étudiants pour cette étape de la méthodologie. Par contre, à long terme, ce type de réflexion personnelle sur la visualisation est payante. Généralement, un enseignement sur les concepts à l'étude dans cette recherche peut se faire en enseignement magistral, mais nous pouvons seulement toucher les étudiants visuels et auditifs avec ce genre de technique. Suite à une discussion avec l'étudiante de l'échantillon, j'ai découvert qu'elle est kinésique et qu'en manipulant du matériel, elle comprend mieux les phénomènes mathématiques. Or, la première étape de l'ACODESA permet aux kinésiques de développer ce côté d'eux. La technologie ici permet de manipuler des objets mathématiques comme les fonctions en en faisant varier les paramètres, les échelles, etc. C'est donc un outil de prédilection pour cette part de la clientèle étudiante. Pour le transfert de la technologie au papier-crayon, les étudiants ont compris qu'on voulait forcer une réflexion sur le sujet. La technologie les stimulait, les étudiants de l'échantillon passaient aisément de l'un à l'autre.

L'apport du travail d'équipe qui suit en est un de confrontation des idées et de discussion, mais il n'y a pas eu de captation sonore ou vidéo de ces parties de l'activité. Les étudiants de l'échantillon ont semblé apprécié de discuter de ce qu'ils ont compris par rapport à la tâche demandée. Cela a permis de discerner certains éléments un peu moins clairs de la démarche dans cette recherche. Par contre, en discutant, les étudiants sont arrivés à un consensus par rapport aux différents types d'asymptotes possiblement présentes dans une fonction polynomiale rationnelle. Ils ont compris qu'il n'y avait pas seulement des asymptotes verticales ou horizontales vu l'absence de ce type de fonction avec asymptote oblique ou curviligne dans leur parcours au secondaire. En comparant les degrés des numérateurs et des dénominateurs, les étudiants étaient en mesure d'identifier le type d'asymptotes et les limites à l'infini dans chaque cas proposé sauf un. Ils ont voulu tester, avec aide du logiciel GeoGebra, leurs appréhensions et leurs hypothèses de recherche, ce que j'ai permis.

Le retour sur la tâche (le devoir à la maison) a été bien réussi par les deux étudiants. Chacun d'eux m'a avoué avoir utilisé GeoGebra à la maison pour vérifier leurs réponses. Donc, la technologie a eu un rôle de vérificateur ici, alors qu'en classe, on s'en servait pour faire de l'analyse de fonctions. L'institutionnalisation (l'enseignement) a été facile pour l'enseignant, car presque tout avait été bien assimilé durant la méthodologie et les phases de travail d'équipe. Après la recherche, j'ai donc changé mon fusil d'épaule par rapport au travail d'équipe et à la place de la technologie en salle de classe.

4.4 CE QUE NOUS POUVONS AMÉLIORER

Comme vu lors de l'étude du manuel de Charron et Parent, à la place d'étudier que 3 cas de figure précis et décidés par l'enseignant-chercheur lors de l'expérimentation, on pourrait bâtir un nouveau type de laboratoire GeoGebra dans lequel les étudiants choisiraient les valeurs des exposants des polynômes au numérateur et au dénominateur des fonctions. On pourrait même permettre la modification des coefficients dans les polynômes. On effectuerait le tout avec la création de curseurs dans le fichier GeoGebra (Voir le laboratoire 2.3 en appendice F). Cela permettrait aux étudiants de généraliser en mathématiques et cela est une opportunité rare d'exploration et de généralisation. On pourrait aussi pousser l'étude beaucoup plus loin en ajoutant des logarithmes, des exponentielles, car ces fonctions sont toutes deux à l'étude.

Il faudrait écourter la longueur du questionnaire afin d'encourager la participation des étudiants à cette activité formative. Les étudiants se sont plaints d'un questionnaire ayant une longueur d'une vingtaine de pages et d'avoir trois heures pour accomplir cette tâche. C'est vrai que c'est long, autant pour l'enseignant-chercheur que les étudiants en tant que tel.

Toujours avec le questionnaire, dans la section du résumé, on devrait opter pour une amélioration du tableau-résumé afin de faciliter ce dernier chez les étudiants. Le tableau devrait prendre une forme similaire à celle-ci.[21]

---

[21] Veuillez faire fi de l'erreur d'orthographe à asymptote de la part de l'éditeur.

Vous venez d'observer trois cas de limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales. Complétez le tableau ci-dessous.

Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur	**Si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur**	**Si le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur**
Lorsque *x* tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______.	Lorsque *x* tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______.	Lorsque *x* tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______.
Il y a une asymtote ______ sous ces conditions.	Il y a une asymtote ______ sous ces conditions.	Il y a une asymtote ______ ou ______ sous ces conditions.
Nous le savons car, ______	Nous le savons car, ______	Nous le savons car, ______

Figure 4.1: Suggestion d'un tableau résumé (Laporte, 2016)

Il faudra aussi, pour l'enseignement, faire attention à ne pas parler de notions d'asymptotes avant le laboratoire ni de limites à l'infini. Il faudrait inviter les étudiants à ne PAS lire dans leur manuel avant l'activité formative afin d'éviter tout biais possible par ces lectures. C'est sûr que c'est un peu contre-intuitif de demander cela aux étudiants, mais il faudrait le tenter.

Il faudrait préparer le terrain d'avance afin d'obtenir soit un laboratoire informatique pour l'expérimentation, soit la collaboration des étudiants afin qu'ils amènent leur propre matériel informatique (suivant la politique BYOD de certains collèges, dont l'hôte de l'expérimentation), soit pour procéder à l'emprunt de matériel informatique pour bâtir un laboratoire informatique, mais en salle de classe temporairement pour le temps de l'expérimentation. Avoir des appareils avec le logiciel déjà installé en aurait facilité son utilisation et l'enregistrement des fichiers lors de cette étude.

4.5 CONSIDÉRATIONS POUR CONTINUER UNE RECHERCHE EXPÉRIMENTALE DU MÊME TYPE

Il est certain que le nombre d'étudiants mis à l'étude dans le cadre de cette recherche n'était pas très exhaustif. On devrait pouvoir refaire une expérience de ce type dans le cadre d'un groupe-classe plus nombreux pour pouvoir accéder à des conclusions beaucoup plus généralisables. Par contre, avec un petit nombre, s'il y a des questions d'ordre technologique, c'est plus rapidement résolu qu'avec un grand nombre d'individus, mais il ne s'agit que d'un avantage pour l'enseignant, car moins de monde à sa charge, et le chercheur, pour aller vers une recherche plus en profondeur.

Pendant que l'on parle des étudiants, on pourrait aussi indiquer que le groupe-classe à l'étude dans le cadre de cette expérimentation est assez hétérogène: étudiants québécois, niveau de mathématiques antérieures très varié, plusieurs étudiants avec troubles de concentration et de l'apprentissage variés, les étudiants avec des niveaux variés d'aisance avec l'informatique, etc. Il serait intéressant d'explorer des groupes un peu plus homogènes ayant un niveau de mathématiques comparable, peu de troubles de concentration et de l'apprentissage, un niveau comparable d'aisance avec l'informatique. Cela nous aiderait à avoir une vue d'ensemble beaucoup plus ciblée afin de passer plus aisément à des conclusions viables. On devrait donc aussi viser une plus grande parité hommes-femmes et un plus gros groupe.

Une utilisation du logiciel GeoGebra plus précoce dans la session devrait être privilégiée pour rendre les étudiants plus aptes à l'utilisation de ce dernier. Des laboratoires préparatifs devraient être envisagés pour qu'il n'y ait que très peu de questions d'ordre technologique durant cette expérimentation. La phase d'instrumentation devrait être faite très tôt de sorte que les étudiants puissent utiliser GeoGebra à bon escient en contexte de classe, à leur guise, mais selon les autorisations de l'enseignant. (C'est ce que nous avons fait pour la première fois lors de cette expérimentation. L'instrumentation a été faite dès la première semaine de cours pour réviser les concepts préalables avec utilisation de GeoGebra et l'appui des calculs en version papier-crayon.)

L'enseignant-chercheur ne devrait qu'intervenir pour les questions d'ordre technologique (en suivant la méthode ACODESA) et devrait fortement tenter de ne pas influencer les réponses des étudiants lors de ses interventions. Il est difficile pour l'enseignant-chercheur de distinguer ses objectifs comme chercheur de ses objectifs comme enseignant et c'est principalement pourquoi cette expérimentation fut ardue et longue. Les visées de l'enseignant ne devraient pas être dites lors de l'expérience pour ne pas influencer les étudiants qui ont des buts : de répondre correctement aux questions de l'enseignant pour atteindre une note intéressante à la fin du cours. Pour ces raisons, l'expérimentation ne doit en aucun cas être sujette à évaluation sommative (compter) pour que les étudiants n'aient pas peur de donner une mauvaise réponse.

L'accès à un laboratoire informatique de qualité avec une même plateforme pour tous favoriserait les échanges et cette expérimentation. Lors de cette expérimentation, aucun laboratoire informatique n'était disponible dans la case horaire au Collège. Nous avons donc improvisé un laboratoire informatique en classe: ordinateurs portables et ordinateur de bureau se mélangeaient en classe. Ce fut difficile d'avoir une certaine stabilité dans les réponses, car tout le monde naviguait sur des plateformes différentes. De plus, certains étudiants n'avaient pas téléchargé préalablement le logiciel GeoGebra sur leur outil informatique. C'est un gruge-temps incroyable alors, car cela nécessite un bon accès Wi-Fi, ce qui n'est pas toujours chose simple dans certains établissements scolaires collégiaux.

Avoir un local informatique avec un accès Internet fiable et GeoGebra d'installé préalablement serait une chose souhaitable pour les gens qui voudraient refaire cette expérience dans leur établissement collégial. Si deux enseignants donnent le même cours dans la même plage-horaire, il serait intéressant de joindre les deux groupes-classes dans le même laboratoire, même s'ils ne sont pas de la même langue (je le spécifie, car, au Collège LaSalle, c'est un facteur qui pourrait avoir un impact). Ainsi, il pourrait y avoir partage d'expertise du côté des enseignants, un peu une idée similaire au *team-teaching*, mais pour accélérer le temps de réponse aux questions des étudiants.

Dans le cadre de cette activité pédagogique, les étudiants devaient remplir la première partie du document seul sans aide de leur collègue de classe. Vu que nous n'étions pas dans un laboratoire informatique, l'accès individuel à un ordinateur devait être assuré par les étudiants eux-mêmes avec leur ordinateur portable, leur tablette ou autre plateforme informatique disponible. Ils ont pu aussi bien utiliser le poste enseignant devant la classe. Certaines personnes ne voulaient pas répondre seule et désiraient absolument partager leur support informatique avec un collègue afin d'accéder à leurs réponses aussi. Cette portion est difficile à gérer, car il y a de la discipline à faire en classe pour ne pas avoir de biais statistiquement parlant.

Toujours durant l'activité, le passage du statut « individuel » à « en binôme » fut ardu à gérer, car ce n'est pas tous les étudiants qui ont terminé en même temps la première partie du travail et ils voulaient partager leurs réponses et offrir leur aide même si ce n'était pas le but visé. Par contre, cela a aidé drastiquement à répondre à la sous-question de recherche sur l'approche socioculturelle et l'esprit de collaboration. Les étudiants, même en situation d'évaluation formative, voudront partager leur savoir-faire et leurs savoirs surtout si l'enseignant favorise ce type de partage.

APPENDICE A – PAGE 121 DE THOMAS, FINNEY ET GIORDANO

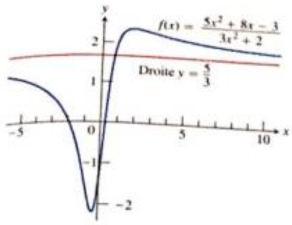


FIGURE 1.3.2 Le graphe de la fonction à l'exemple 3.

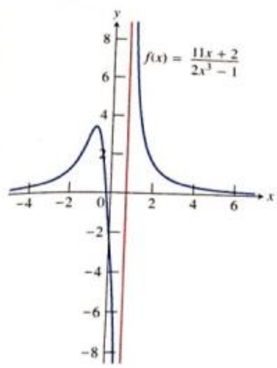


FIGURE 1.3.3 Le graphe de la fonction à l'exemple 4. Le graphe s'approche de l'axe des x à mesure que $|x|$ croît.

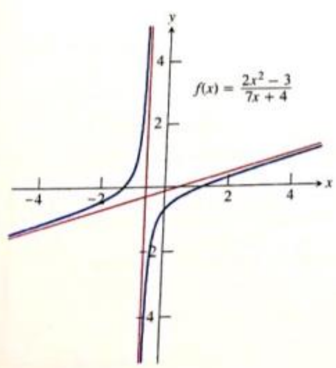


FIGURE 1.3.4 Le graphe de la fonction à l'exemple 5 **a)**. $f(x)$ ne possède pas de limite quand $x \to \pm\infty$.

Exemple 3 **Numérateur et dénominateur du même degré**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

Numérateur et dénominateur divisés par x^2.

$$= \frac{5 + (0) - (0)}{3 + (0)} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

Suivant le même procédé que ci-dessus avec $-\infty$.

$$= \frac{5 + (-0) - (0)}{3 + (0)} = \frac{5}{3}$$

(Voir la figure 1.3.2.)

Exemple 4 **Degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

Numérateur et dénominateur divisés par x^3.

$$= \frac{(0) + (0)}{2 - (0)} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

Suivant le même procédé que ci-dessus avec $-\infty$.

$$= \frac{(0) + (-0)}{2 - (-0)} = 0$$

(Voir la figure 1.3.3.)

Exemple 5 **Degré du numérateur supérieur à celui du dénominateur**

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - (3/x)}{7 + (4/x)}$$

Numérateur et dénominateur divisés par x.

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} (2x) - (-0)}{7 + (-0)}$$

Le numérateur tend alors vers $-\infty$ tandis que le dénominateur tend vers 7, de sorte que le rapport $\to -\infty$.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{7}x$$

$$= -\infty$$

(Voir la figure 1.3.4.)

APPENDICE B – LE LABORATOIRE 2 – (BRUNELLE, É ET M.-A. DÉSAUTELS, 2016)

LABORATOIRE 2.2

Le comportement asymptotique

1. Prenez une feuille de papier standard ($8\frac{1}{2}$" × 11") et coupez-la en 2 parties égales. Mettez de côté l'une de ces parties dans une pile appelée « Aire ». Ainsi, avec 1 coupe, l'aire totale du papier mis de côté correspond à la moitié de la surface de la feuille. Inscrivez cette information dans le tableau ci-dessous.

2. Utilisez la partie qui reste et coupez-la en deux parties égales. Mettez de côté l'une de ces parties dans la pile appelée « Aire ». L'aire totale du papier mis de côté est maintenant différente. Remplissez la deuxième ligne du tableau avec l'information correspondant à cette deuxième coupe.

3. Continuez ce processus jusqu'à 10 coupes en indiquant l'information correspondant à chaque coupe dans le tableau.

Nombre de coupes	Aire totale
1	$\frac{1}{2}$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

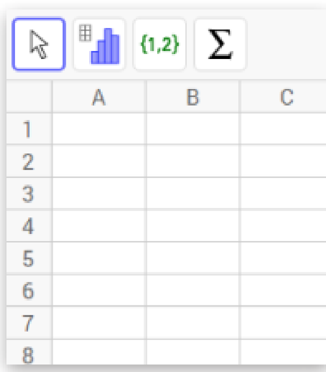
4. Ouvrez le logiciel GeoGebra dans la disposition « Tableur ». Saisissez toutes les lignes sauf la première.

LABORATOIRE 2.2

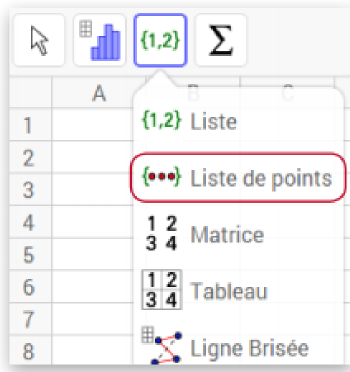
Le comportement asymptotique (suite)

5. Sélectionnez votre plage de données et cliquez sur le troisième bouton (« {1,2} »). Dans le menu déroulant, cliquez sur « Liste de points », puis sur « Créer ». Cela créera une liste de points dans la zone graphique.

Zone tableur pour la saisie des points :



Création de la liste de points après la sélection des coordonnées :



6. Revenez à la disposition « Algèbre » afin de visualiser les fenêtres algébrique et graphique. Dans la zone de saisie, indiquez l'option *AjustLogistique* sur la « *liste1* » qui vient d'être créée. Le logiciel établira une fonction, par régression logistique, qui représente la tendance que suit l'aire totale générée par le processus de coupe.

7. Sur papier, conjecturez la limite de l'aire totale lorsque le nombre de coupes est infini, puis faites calculer la limite par le logiciel lorsque le nombre x de coupes tend vers l'infini. Ces deux limites sont-elles semblables ?

8. Continuez le processus de coupes et ajoutez les données directement dans la disposition « Tableur » de GeoGebra à partir de la 11^{e} ligne.

9. Obtenez-vous une plus grande précision par le calcul de limite de GeoGebra ? Le résultat obtenu s'approche-t-il de la bonne réponse ?

APPENDICE C – EXEMPLE 2.20 (BRUNELLE, É ET M.-A. DESAUTELS, 2016)

EXEMPLE 2.20

Calculez intuitivement les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+1}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{1-x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{e^x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1-x^n}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

SOLUTION

a) Nous ne conservons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire les termes en x.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{1-x} \sim \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}}$$
$$\sim \lim_{x \to \infty} \frac{2}{-1}$$
$$\sim -2$$

b) Nous ne gardons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire le terme en x^2 au numérateur et le terme en x au dénominateur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{1-x} \sim \lim_{x \to \infty} \frac{2x^{\cancel{2}}}{-\cancel{x}}$$
$$\sim \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{-1}$$
$$\sim -\infty$$

c) Nous ne conservons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire le terme en x au numérateur et le terme en x^2 au dénominateur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{1-x^2} \sim \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x}}{-x^{\cancel{2}}}$$
$$\sim \lim_{x \to \infty} \frac{2}{-x}$$
$$\sim 0$$

d) Nous ne gardons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire le terme en x au numérateur et le terme en e^x au dénominateur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{e^x} \sim \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$$
$$\sim 0$$

(car e^x croît plus rapidement que x à l'infini)

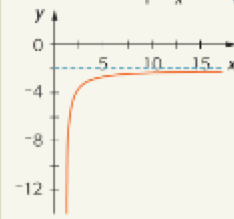
e) Nous ne conservons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire le terme en x au numérateur et le terme en e^x au dénominateur.

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$
$$\sim 0$$

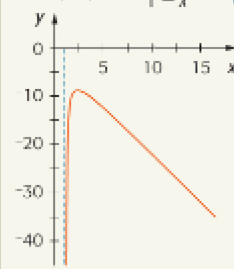
(car e^x croît plus rapidement que x à l'infini)

INTUITIVEMENT...

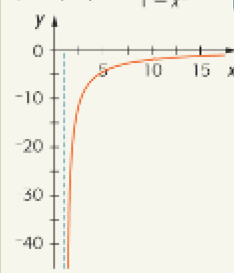
a) Graphique de $\dfrac{2x+1}{1-x}$



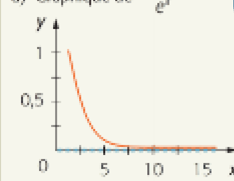
b) Graphique de $\dfrac{2x^2+1}{1-x}$



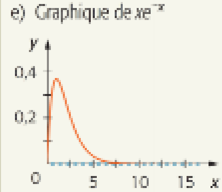
c) Graphique de $\dfrac{2x+1}{1-x^2}$



d) Graphique de $\dfrac{2x+1}{e^x}$

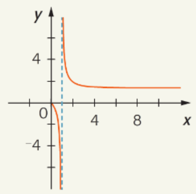


e) Graphique de xe^{-x}



INTUITIVEMENT…

g) Graphique de $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$



f) Nous ne gardons que les termes qui croissent le plus rapidement à l'infini, c'est-à-dire le terme en e^x au numérateur et le terme en x^n au dénominateur.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1-x^n} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{^-x^n} \quad \text{(car } e^x \text{ croît plus rapidement que } x^n \text{ à l'infini)}$$

$$\sim {}^-\infty$$

g) Par le graphique du comportement à l'infini, nous arrivons immédiatement à la réponse.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \sim \infty \quad \text{(car } \sqrt{x} \text{ croît plus rapidement que } \ln(x) \text{ à l'infini)}$$

Ainsi, le fait de connaître le comportement de certaines fonctions à l'infini permet de calculer intuitivement leur limite à l'infini.

APPENDICE D – LE LABORATOIRE D’INSTRUMENTATION

Titre : Les fonctions et l’algèbre

Dans 4 fichiers séparés GeoGebra que vous enregistrez et sur papier, résolvez les questions suivantes.

No1. (1 pt)

Une fonction quadratique passe par les points A(3; 4), B(7; -2) et C(11; 4).

a) Trouvez son équation sur papier avec les calculs adéquats.
b) Tracez les points A, B et C en GeoGebra. Insérez l’équation de la fonction dans la zone de saisie. Vérifiez, avec le bouton de relation, que les points sont bien éléments de la courbe quadratique.

No2. (2 pts)

M. Luigi désire se débarrasser de lasagne radioactive dans les plus brefs délais. Ses 13 kg de lasagne perdre 4% de leur masse annuellement.

a) Trouvez l’équation d’une fonction exponentielle M(x) donnant la masse restante de lasagne radioactive après x années sur papier.

b) Tracez la courbe de la fonction en saisissant son équation dans la zone de saisie. Par la suite, vérifiez que les points (0; 13) et (1, 13-0,04*13) sont des éléments de cette fonction.

c) Découvrez, avec aide du logiciel (fenêtre graphique ou tableur), combien de kg restera-t-il après 10 ans dans la corbeille à vidanges.

No3. (1 pt)

a) Résolvez l'équation suivante sur papier.

$$\frac{2}{3x} = \frac{x+3}{1-2x}$$

b) Comparez vos résultats avec ce que le calculateur symbolique de GeoGebra vous dira.

No4. (1 pt)

Trouvez le domaine et l'image de l'équation de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$$

a) Sur papier
b) Avec aide du logiciel, vérifiez vos réponses.

Enregistrez les 4 fichiers et faites-les parvenir à votre nom sur Léa, dans la section Travaux.

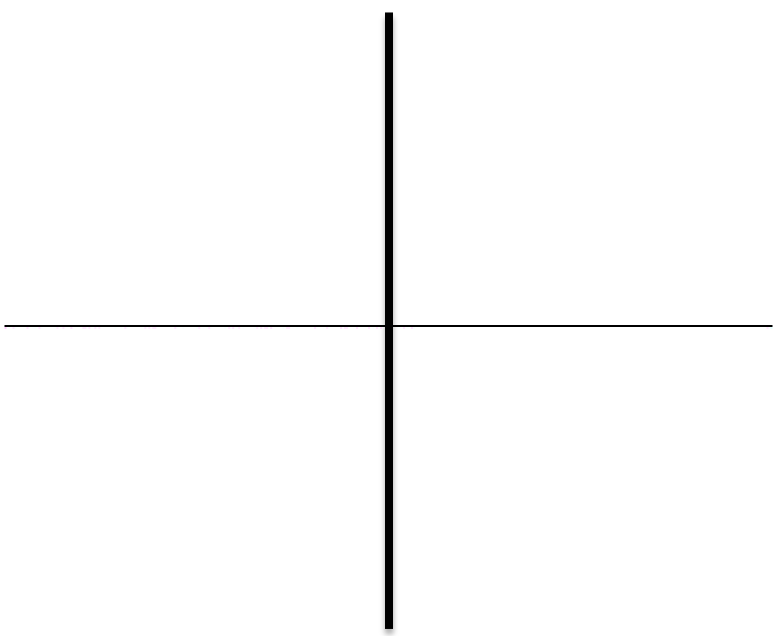
APPENDICE E – QUESTIONNAIRE DE LA RECHERCHE

<u>QUESTIONNAIRE AUTOUR DES LIMITES À L'INFINI DE FONCTIONS POLYNOMIALES RATIONNELLES.</u>

Veuillez SVP répondre au meilleur de vos connaissances aux questions constituant ce document. Veuillez SVP répondre consciencieusement aux questions dans l'ordre établi dans ce questionnaire. Vos réponses seront strictement confidentielles (pas de nom et impossible de vous retracer). Il n'y aura aucun jugement de valeur de la part de votre enseignant sur les réponses données dans votre formulaire. Vos réponses ne sont comptabilisées qu'à des fins de recherche, dont votre enseignant est le chercheur. Répondre à ce questionnaire n'est pas obligatoire mais constitue une activité pédagogique en tant que tel et a une valeur formative dans votre formation du cours de Calcul 1.

Question préalable 1 : Définissez ce qu'est une asymptote selon vous.

Question préalable 2 : Donnez un exemple de fonction ayant cette propriété particulière (représentation algébrique **et** représentation graphique).

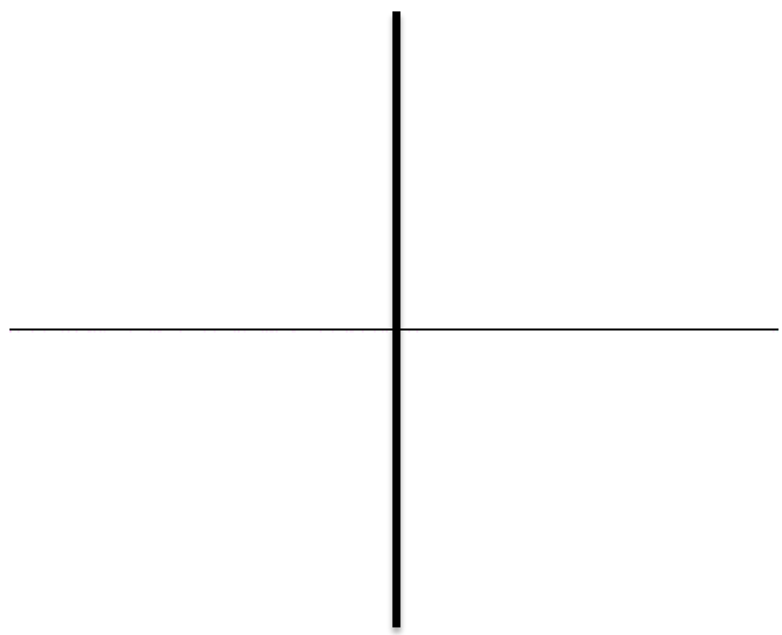


Activité 1

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{50}{2x^2}$$

a) Dessinez un graphique sommaire pour montrer de quoi a l'air la fonction f(x) précédente dans l'espace alloué ci-dessous selon vous.



b) Par rapport au graphique que vous avez tracé, la fonction a-t-elle, selon vous un comportement asymptotique? Semble-t-elle tendre vers une valeur précise? Expliquez.

c) Sans modifier la fenêtre de base, tracez la fonction f(x) sur une feuille GeoGebra. Obtenez-vous une représentation graphique sur papier semblable à celle que GeoGebra vous renvoie? Sinon, qu'est-ce qu'il y a de différent?

d) La fonction f(x) semble-t-elle suivre une certaine tendance si l'abscisse augmente infiniment?

e) Modifiez la fenêtre GeoGebra pour avoir une idée plus juste du phénomène. Expliquez votre point de vue sur la question précédente ainsi que les modifications apportées à la fenêtre.

f) Trouvez une fonction g(x) qui semble avoir un comportement semblable quand *x* devient de plus en plus grand.

Tracez le graphique de cette fonction g(x) en GeoGebra sur la même feuille que le graphique précédent.

g) Pourquoi avoir fait ce choix de fonction g(x) en particulier?

h) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Demandez à la zone de saisie de calculer la limite de h(x) à l'infini positif. Écrivez ce que cela vous indique ci-dessous. Interprétez ce que donne le logiciel selon vous.

i) Complétez l'énoncé ci-dessous selon vos appréhensions.

$\lim_{x \to \infty} \frac{50}{2x^2} =$ ____________________________

j) Enregistrez le fichier sous le nom activite1.ggb sur le bureau.

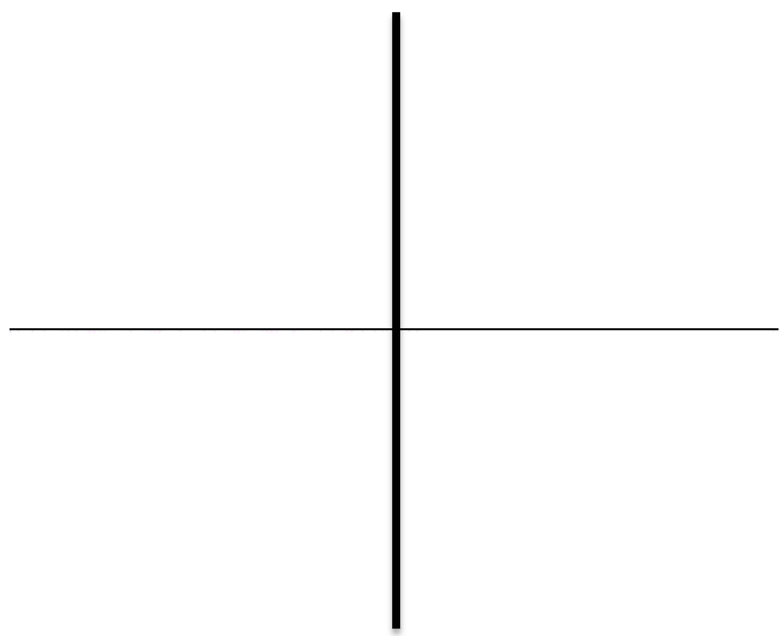
k) Après avoir complété l'activité 1, avez-vous remarqué quelque chose de particulier par rapport à la limite à l'infini présentée? Expliquez et vérifiez votre hypothèse en apportant des modifications adéquates à la feuille. Enregistrez-la de nouveau.

Activité 2

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{27x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2x + 4}$$

a) Dessinez un graphique sommaire pour montrer de quoi a l'air la fonction f(x) précédente dans l'espace alloué ci-dessous selon vous.



b) Par rapport au graphique que vous avez tracé, la fonction a-t-elle, selon vous un comportement asymptotique? Semble-t-elle tendre vers une valeur précise? Expliquez.

c) Sans modifier la fenêtre de base, tracez la fonction f(x) sur une nouvelle feuille GeoGebra. Obtenez-vous une représentation graphique sur papier semblable à celle que GeoGebra vous renvoie? Sinon, qu'est-ce qu'il y a de différent?

d) La fonction f(x) semble-t-elle suivre une certaine tendance si l'abscisse augmente infiniment?

e) Modifiez la fenêtre GeoGebra pour avoir une idée plus juste du phénomène. Expliquez votre point de vue sur la question précédente ainsi que les modifications apportées à la fenêtre.

f) Trouvez une fonction g(x) qui semble avoir un comportement semblable quand x devient de plus en plus grand.

Tracez le graphique de cette fonction g(x) en GeoGebra sur la même feuille que le graphique précédent.

g) Pourquoi avoir fait ce choix de fonction en particulier?

h) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Demandez à la zone de saisie de calculer la limite de h(x) à l'infini positif. Écrivez ce que cela vous indique ci-dessous. Interprétez ce que donne le logiciel selon vous.

i) Complétez l'énoncé ci-dessous selon vos appréhensions.
$\lim_{x\to\infty} \frac{27x^2+8x-3}{3x^2+2x+4} =$ ______________________________

j) Enregistrez le fichier sous le nom activite2.ggb sur le bureau.

k) Après avoir complété l'activité 2, avez-vous remarqué quelque chose de particulier sur la limite à l'infini présentée? Expliquez et vérifiez votre hypothèse en apportant des modifications adéquates à la feuille. Enregistrez-la de nouveau.

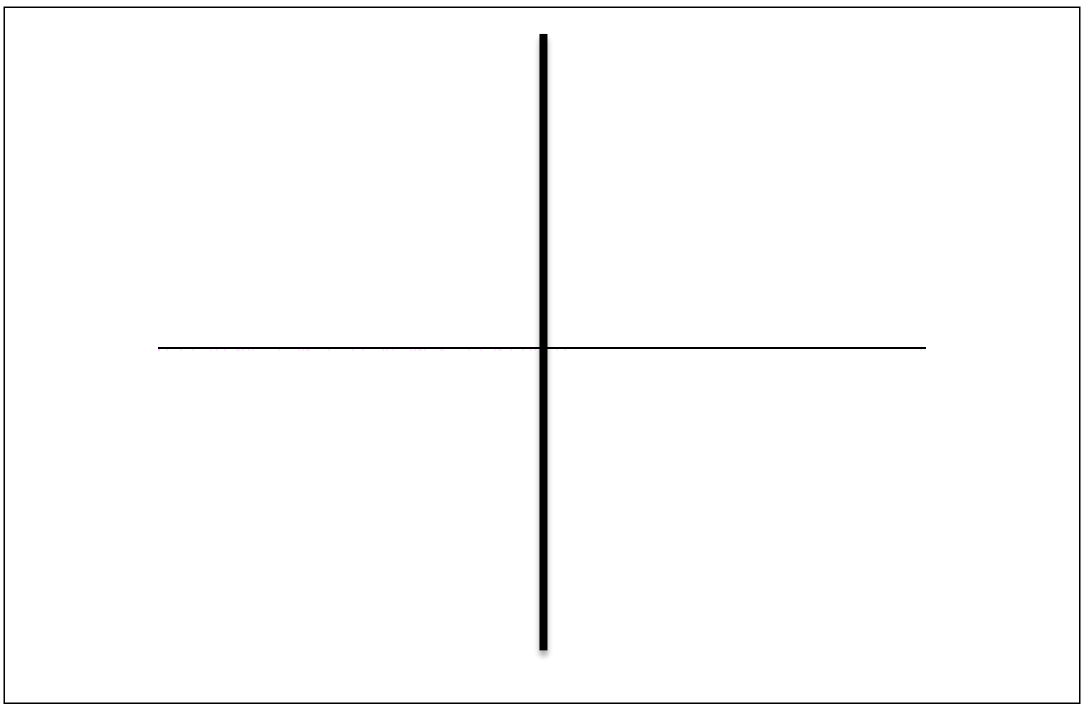
l) Y aurait-il d'autres fonctions qui agiraient de la sorte lorsqu'on tente d'en calculer la limite à l'infini? Si oui, donnez-en deux exemples avec leurs limites à l'infini selon vous.

Activité 3

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{15x^3 + 8x - 3}{3x^2 + 2x + 4}$$

a) Dessinez un graphique sommaire pour montrer de quoi a l'air la fonction f(x) précédente dans l'espace alloué ci-dessous selon vous.



b) Par rapport au graphique que vous avez tracé, la fonction a-t-elle, selon vous un comportement asymptotique? Semble-t-elle tendre vers une valeur précise? Expliquez.

c) Sans modifier la fenêtre de base, tracez la fonction f(x) sur une nouvelle feuille GeoGebra. Obtenez-vous une représentation graphique sur papier semblable à celle que GeoGebra vous renvoie? Sinon, qu’est-ce qu’il y a de différent?

d) La fonction f(x) semble-t-elle suivre une certaine tendance si l’abscisse augmente infiniment?

e) Modifiez la fenêtre GeoGebra pour avoir une idée plus juste du phénomène. Expliquez votre point de vue sur la question précédente ainsi que les modifications apportées à la fenêtre.

f) Trouvez une fonction g(x) qui semble avoir un comportement semblable lorsque x devient de plus en plus grand.

Tracez le graphique de cette fonction g(x) en GeoGebra sur la même feuille que le graphique précédent.

g) Pourquoi avoir fait ce choix de fonction en particulier?

h) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Demandez à la zone de saisie de calculer la limite de h(x) à l'infini positif. Écrivez ce que cela vous indique ci-dessous. Interprétez ce que donne le logiciel selon vous.

i) Complétez l'énoncé ci-dessous selon vos appréhensions.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{15x^3 + 8x - 3}{3x^2 + 2x + 4} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

j) En GeoGebra, dans la zone de saisie, tapez h(x) = f(x) – g(x). Cachez temporairement les fonctions f(x) et g(x). Êtes-vous en mesure de déterminer quel comportement la fonction h(x) a-t-elle à l'infini en bougeant et en modifiant la zone du graphique de la fonction? Notez chacune des transformations effectuées et dites pourquoi ce tel comportement.

k) Pouvons-nous conclure que les fonctions f(x) et g(x) ont la même limite à l'infini?

l) La fonction f(x) aurait-elle un comportement asymptotique? Si oui, décrivez-le. Sinon, dites pourquoi une telle réponse.

m) Suite à l’activité 3, pouvons-nous arriver à une conclusion particulière sur la limite présentée?

n) En serait-il ainsi pour d’autres fonctions? Pourquoi?

o) Si vous avez répondu oui en p), veuillez donner des exemples de fonctions agissant de la sorte et expliquez pourquoi.

p) Enregistrez cette activité sous le nom activite3.ggb sur le bureau.

Résumé

a) Essayez sur cette feuille de résumé les conclusions auxquelles vous êtes-passés après ces 3 activités autour du thème des limites à l’infini de fonctions rationnelles polynomiales en sectionnant votre pensée sous 3 sortes de limites.

b) Définissez ce qu’est une asymptote en vos mots.

c) Tentez, en équipe de 2, de résoudre les limites suivantes.

$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+2}$

$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x+3}{3x+4x^2-1}$

$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{12015x}{9x^3}$

$d)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+3}{x-x^2}$

$e)\ \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

$f)\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+12}{9x^3}$

APPENDICE F – LABORATOIRE 2.3 (ÉCRIT PAR MOI)

LABORATOIRE 2.3

Les limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales

1 Dans le logiciel GeoGebra créez deux curseurs :

- le curseur m allant de 0 à 6 avec un pas de 1 ;
- le curseur n, allant de 0 à 6 avec un pas de 1.

Créez ensuite la fonction $f(x) = \frac{4x^m - 6}{7x^n - 3}$.

2 Considérez les trois cas de limites à l'infini suivants.

i) Établissez m inférieur à n.

- Tentez de trouver la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini positif en glissant la courbe ou en changeant les échelles.
- Retournez à la fenêtre avec les échelles régulières et calculez la limite de la fonction vers l'infini positif à l'aide d'un papier et d'un crayon.
- Vérifiez votre réponse à l'aide du logiciel. Faites une capture d'écran de ce résultat et déposez-le dans un dossier avec votre fichier GeoGebra.

ii) Établissez m égal à n.

- Estimez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini positif en observant attentivement le graphique de la fonction comme précédemment.
- Calculez cette limite à l'aide d'un papier et d'un crayon.
- À l'aide du logiciel, vérifiez que cette limite est correcte en traçant une asymptote de la forme $g(x) = K$. Pour ce faire, calculez la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers ∞. Si la réponse est 0, alors les deux fonctions tendent vers la même valeur à l'infini. Faites une capture d'écran de ce résultat et déposerez-le dans un dossier avec votre fichier GeoGebra.

iii) Établissez m supérieur à n.

- À l'aide d'un papier et d'un crayon, tentez de trouver le résultat de la division du numérateur par le dénominateur et calculez la limite à l'infini. Des termes tendront vers 0 et d'autres vers l'infini. Ceux qui tendront vers l'infini formeront une asymptote (oblique ou curviligne) de la fonction.

LABORATOIRE 2.3

Les limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales (suite)

- À l'aide du logiciel, tracez cette asymptote comme une fonction $g(x)$, et calculez la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers ∞. Si le résultat est 0, alors les deux fonctions tendent vers la même valeur à l'infini, et la courbe de la fonction $f(x)$ tend vers celle de l'asymptote, la courbe de la fonction $g(x)$. Faites une capture d'écran de ce résultat et déposez-le dans un dossier avec votre fichier GeoGebra.

3. Vous venez d'observer trois cas de limites à l'infini de fonctions rationnelles polynomiales. Complétez le tableau ci-dessous.

Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur	**Si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur**	**Si le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur**
Lorsque x tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______________.	Lorsque x tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______________.	Lorsque x tend vers l'infini, la limite de la fonction est ______________.
Il y a une asymtote ______________ sous ces conditions. Nous le savons car, ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________	Il y a une asymtote ______________ sous ces conditions. Nous le savons car, ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________	Il y a une asymtote ______________ ou ______________ sous ces conditions. Nous le savons car, ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________ ______________

BIBLIOGRAPHIE

Ahuntsic, S. d. (2014, Septembre 03). *Cours aux taux de réussite inférieurs à 75 % - Hiver 2014*. Consulté le Septembre 27, 2016, sur Collège Ahuntsic: http://www.collegeahuntsic.qc.ca/sites/default/files/public/services/bibliotheque/rureu010_-_cours_aux_taux_de_reussite_inferieurs_a_75_-_h-2014.pdf

Barbeau, D. (2007). *Interventions pédagogiques et réussite au cégep,*. Québec: Presses de l'Université Laval.

Brunelle, É et M.-A. Désautels. (2016). *Calcul Différentiel.* Montréal: Les éditions CEC.

Cartier,S et L. Langevin. (2001). Tendances et évaluations des dispositifs de soutien aux étudiants du. *Revue des sciences de l'éducation, volume 27, no2*, pp. 353-381.

Charron, G. et P. Parent. (1995). *Mathématiques 103 - Calcul différentiel et intégral I.* Laval: Éditions Vivantes.

Collège LaSalle. (2016, Décembre 03). Plan de cours - 201-103-AS - Calcul I. Montréal, Québec, Canada: Collège LaSalle.

Courant et Robbins. (2002). *What is Mathematics?* Mexico: Traduction personnelle de la traduction espagnole, Fondo de Cultura Económica.

Delahaye, J.-P. (2017, Avril 24). *D'Aristote à Bolzano : l'impensable infini actuel.* Consulté le Mai 21, 2017, sur Futura Sciences: http://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-infini-il-paradoxal-mathematiques-1590/page/3/

Drolet, D. (2012, octobre 1). *Évaluation du niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction*. Consulté le décembre 03, 2016, sur archipel: http://www.archipel.uqam.ca/5193/1/M12670.pdf

Dufour, S. (2011, Avril). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée.* Consulté le Septembre 23, 2017, sur Archipel / UQAM: http://www.archipel.uqam.ca/4059/1/M12005.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* pp. 37-65.

Eisenberg, T. et T. Dreyfus. (1991). *On the Reluctance to Visualize in Mathematics.* Washington: Visualization in teaching and learning mathematics.

Etchecopar, P. e.-P. (2007). *La méthode de résolution de problèmes, Initiation à la modélisation*. Consulté le décembre 11, 2016, sur Aestq: http://www.aestq.org/sautquantique/activite/ANN-07.pdf

Fréchette, N. (2010, Mai 19). *Annexes - Recherche sur la persévérance scolaire des étudiants du programme de sciences humaines*. Consulté le Septembre 27, 2016, sur Les cégeps: http://lescegeps.com/fichiers/pdf/20101118_annexes-rapport-2010-05-19.pdf?target=/sites/file_edit.php?id=253

Grenier-Boley, N. et S. Bridoux, M. De Vleeschouwer, V. Durand-Guerrier, etc. (2015, Octobre 14). *Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite en première année d'université : adaptation de deux ingénieries.* Consulté le Septembre 23, 2017, sur Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage: http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/emf2015gt7ciiu.pdf

Hamel, J. et L. Amyotte. (2007). Dans *Calcul Différentiel* (pp. 18-45). Montréal: ERPI.

Hersh, R et P. Davis. (1986). *L'Univers mathématique.* gauthier villars.

Hitt, F. (2008). *Fernando Hitt - UQAM*. Consulté le décembre 10, 2016, sur Représentations fonctionnelles dans les processus de modélisation chez des: http://www.hitt.uqam.ca/mat3225_fich/Morasse_Hitt_Gonzalez_GDM_2008.pdf

Hitt, F. (2013, juin). Didactique du calcul différentiel et intégral. (C. Laporte, Intervieweur)

Laporte, C. (2016, juin). Promotion du manuel scolaire Calcul Différentiel. *Calcul Différentiel*. Variées, Québec, Canada: Les éditions CEC.

Larousse. (2016). *Technologie.* Consulté le décembre 18, 2016, sur Le dictionnaire Larousse: http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/technologie/76961

Les éditions Chenelière. (2017). *Calcul différentiel, 7e édition - Livres du préscolaire à l'université | Chenelière*. Consulté le juin 2017, 08, sur Éditions Chenelière: https://www.cheneliere.ca/7888-livre-calcul-differentiel-7e-edition.html

MEES, M. d. (2011). *guide_administration_correction.pdf*. Consulté le décembre 11, 2016, sur récit MST: http://recitmst.qc.ca/mat2tic/IMG/pdf/Grille_CD1_1er_cycle.pdf

Páez Murillo, R. E. (2005). *Reconstrucción del concepto de límite : estudio de un caso*. Cúcuta-Colombia: Universidad Francisco de Paula Santander.

Pelletier, E. (2004, Mars 01). *Guide pour les enseignants - Les troubles d'apprentissage*. Consulté le décembre 20, 2017, sur Bibliothèque canadienne en alphabétisation et en compétences essentielles: http://www.bdaa.ca/biblio/apprenti/aqeta/taguide/taguide.pdf

ProfWeb. (2017). *Profil TIC | ProfWeb*. Consulté le 05 27, 2017, sur ProfWeb: http://www.profweb.ca/profil-tic/

Selden, Mason and Selden. (1989). *Les étudiants moyens en calcul peuvent-ils résoudre des problèmes non-routiniers?*

Serret, J. A. (1894). Dans *Cours de calcul Différentiel et Intégral* (p. 3). Paris: Gauthier-Villers.

Tcheuffa, J. (2015). *Étude des situations paradigmatiques dans l'introduction du concept de la dérivée au collégial*. Montréal: Université du Québec à Montréal.

Thomas, Finney, Demana, Waits. (2005). *Calculus a graphing approach*. Boston: Addison-Wesley Publishing.

Thomas, Finney, Weir, Giordano. (2001). *Calcul Différentiel*. Laval: Beauchemin.

Tremblay, M. (2011, janvier 28). *Regard sur l'évaluation des mathématiques au secondaire : entre visées ministérielles et pratique effectives*. Consulté le décembre 11, 2016, sur blogue.education0312: http://blogue.education0312.qc.ca/wp-content/uploads/2013/09/TremblayMStLouisJanvier2011.pdf

Wikipedia. (2016, octobre 31). *(ε,_δ)-definition_of_limit*. Consulté le novembre 1, 2016, sur Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/(%CE%B5,_%CE%B4)-definition_of_limit#/media/File:L%C3%ADmite_01.svg

Zimmermann, W & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? Dans *Vizualisation in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). USA: MAA Series.